

16 Rechten en merkwaardige lijnen

CORRECTIESLEUTEL

Inhoud

- 1. Vergelijking van de grafiek van een eerste graadsfunctie
- 2. Rechten evenwijdig met één van de assen
- 3. De cartesische vergelijking van een rechte opstellen
- 4. De algemene vergelijking van een rechte
- 5. Merkwaardige lijnen
- 6. Vectoriële en parametrische vergelijkingen van een rechte

Signaal oefeningen

Differentiatietraject

Studiewijzer



WAT JE AL KUNT

- het functievoorschrift van een eerstegraadsfunctie herkennen
- de betekenis van a en b in $f(x) = ax + b$ uitleggen
- de grafiek van een eerstegraadsfunctie tekenen
- het voorschrift van een eerstegraadsfunctie bepalen
- merkwaardige lijnen in een driehoek herkennen
- de middelloodlijn van een lijnstuk en bissectrices van een hoek construeren
- grafisch werken met vectoren en rekenen met coördinaten van vectoren



WAT JE LEERT IN DEZE MODULE

- rechten tekenen met behulp van een gegeven vergelijking
- de vergelijking van een rechte opstellen als een punt en de richtingscoëfficiënt gegeven zijn
- de vergelijking van een rechte opstellen als twee punten gegeven zijn
- de algemene vergelijking van een rechte
- het verband leggen tussen de algemene vergelijking van een rechte en de vorm $y = ax + b$

- zwaartelijnen, hoogtelijnen, middelloodlijnen en bissectrices gebruiken bij problemen met driehoeken zoals omgeschreven en ingeschreven cirkel, vergelijking van een zwaartelijn, ...
- de vectoriële en parametrische vergelijking opstellen en omzetten van de ene naar de andere vorm



IN DE KIJKER

Je kan vergelijkingen van rechten koppelen aan de grafiek en omgekeerd.



WISKUNDETAAL

- cartesische vergelijking van een rechte
- richtingscoëfficiënt
- algemene vergelijking van een rechte
- middelloodlijn
- bissectrice
- zwaartelijn
- hoogtelijn
- middenparallel
- omgeschreven cirkel
- ingeschreven cirkel
- parametrische vergelijking van een rechte
- vectoriële vergelijking van een rechte



Opdracht 1

Duid alle functievoorschriften aan van de functies die als grafiek een rechte hebben.

$$f(x) = x$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

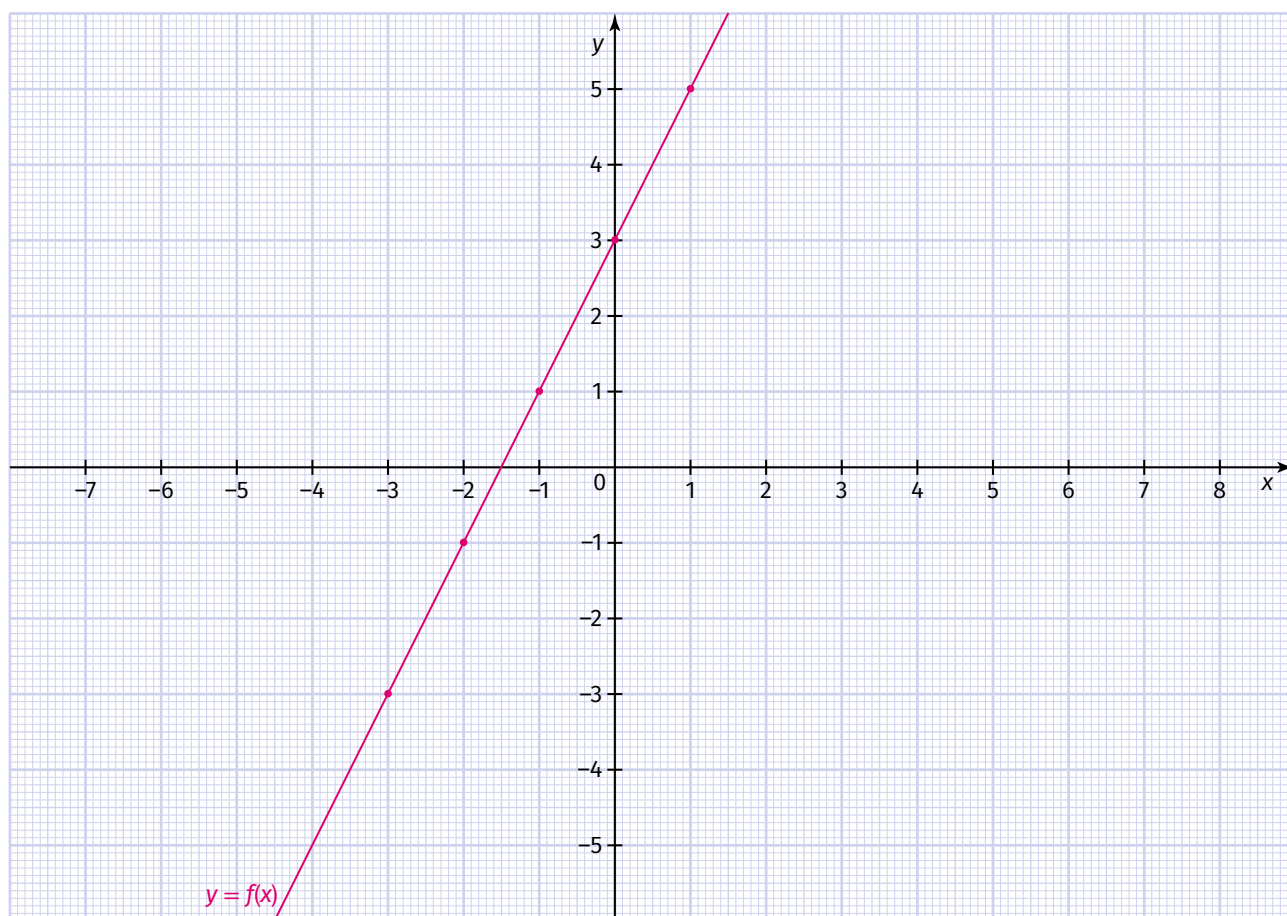
$$f(x) = \frac{-1}{3}x + 1$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Opdracht 2

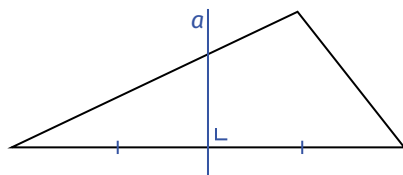
Teken de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = 2x + 3$. Vul eerst de waardentabel in.

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

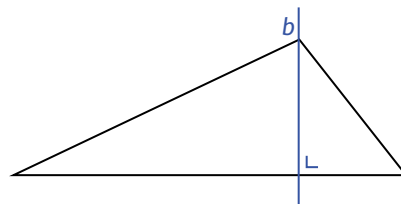


Opdracht 3

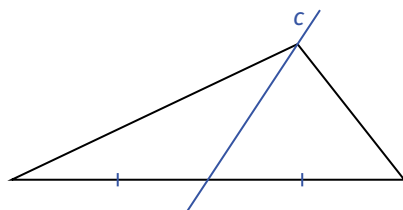
Noteer de juiste naam van de getekende merkwaardige lijn in de driehoek.



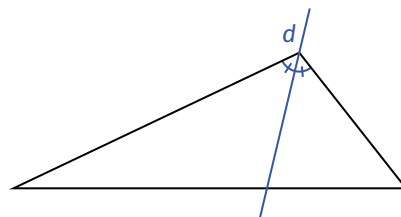
middelloodlijn



hoogtelijn



zwaartelijn



bissectrice



Opdracht 4

Voer de volgende tekenopdrachten uit. Gebruik eventueel ICT.

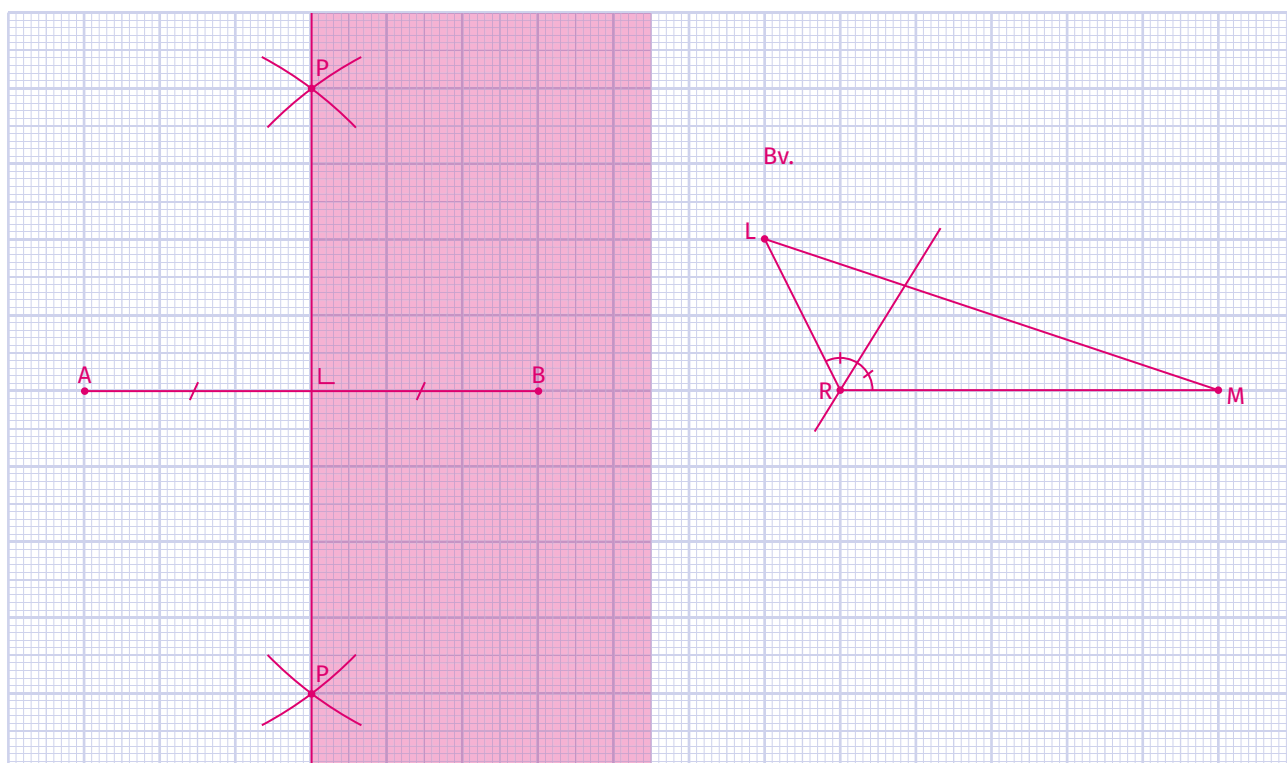
Opdracht 1:

- Teken een lijnstuk $[AB]$ met een lengte van 6 cm.
- Teken de middelloodlijn van $[AB]$.
- Bepaal het punt P dat op 5 cm ligt van zowel A als B .
- Kleur het gebied waar alle punten liggen die dichter bij B dan bij A liggen.



Opdracht 2:

- Teken een stomphoekige driehoek KLM .
- Teken de bissectrice van de stompe hoek.



1 De vergelijking van de grafiek van een eerstegraadsfunctie

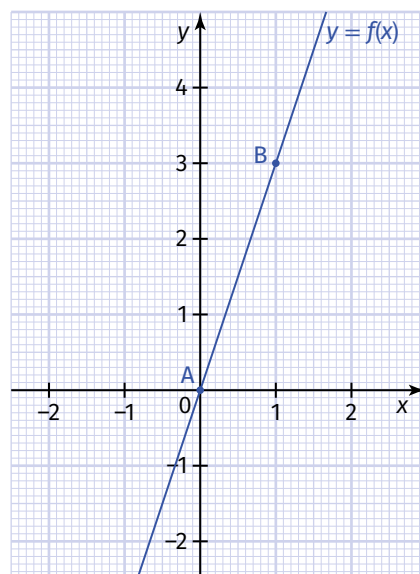
1.1 Een rechte met als vergelijking $y = ax$

Je ziet de grafiek van de functie f met voorschrift $f(x) = 3x$.

In de meetkunde leerden we dat een rechte wordt bepaald door twee verschillende punten. Hier zien we de rechte AB met $A(0, 0)$ en $B(1, 3)$.

We stellen vast dat de grafiek van een eerstegraadsfunctie met als voorschrift $f(x) = ax$ een rechte is en dat we die rechte ook kunnen uitdrukken aan de hand van een **vergelijking**, namelijk $y = ax$.

Deze rechte gaat door de oorsprong. Het punt $(0, 0)$ is dus een oplossing van de vergelijking $y = ax$. Een tweede punt van de rechte kan bepaald worden door een zelfgekozen x -waarde in te vullen in de vergelijking en zo de bijhorende y -waarde te bepalen.



formule $p \leftrightarrow y = ax$

We lezen dit als: de rechte p heeft als vergelijking $y = ax$.



— Merk op —

Een functie met voorschrift $f(x) = ax$ heeft als grafiek een rechte met de vergelijking $y = ax$.

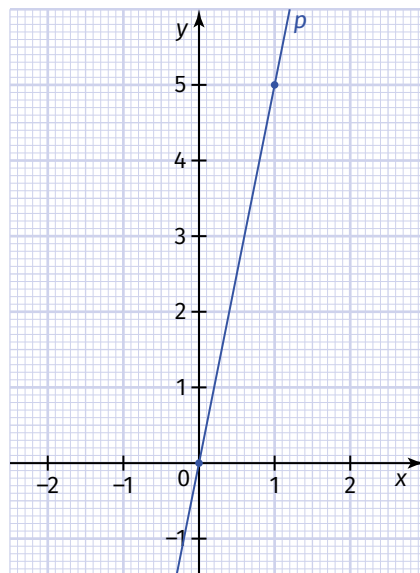
Voorbeeld

De rechte p heeft als vergelijking $y = 5x$.

We zoeken twee punten waarvoor deze vergelijking een oplossing heeft.

- $y = 5x$ is de vergelijking van een rechte door de oorsprong:
Stel $x = 0$ dan wordt: $y = 5 \cdot 0$
 $y = 0$
- Stel $x = 1$ dan wordt: $y = 5 \cdot 1$
 $y = 5$

De punten $(0, 0)$ en $(1, 5)$ liggen op de rechte p .



Deze functie is stijgend / dalend

De a -waarde (= rico) van deze functie is ...

De b -waarde (= snijpunt met y -as) van deze functie is...

Het nulpunt van deze functie is...

1.2 Een rechte met als vergelijking $y = ax + b$

We leerden al dat de grafiek van een functie f met als voorschrift $f(x) = ax + b$ een rechte is die de y -as snijdt in het punt $(0, b)$. We kunnen dus zeggen dat $(0, b)$ een oplossing is van de vergelijking $y = ax + b$, want:

$$y = ax + b$$

$$y = a \cdot 0 + b$$

$$y = b$$

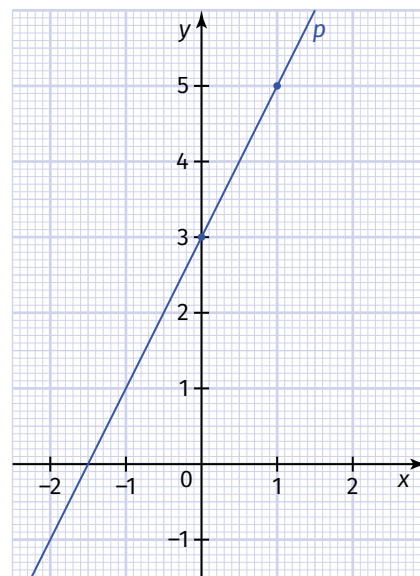
Het punt $(0, b)$ is alvast een eerste punt van de rechte met als vergelijking $y = ax + b$. Een tweede punt kan bepaald worden door een zelfgekozen x -waarde in te vullen in de vergelijking en de bijhorende y -waarde te bepalen.

Voorbeeld

De rechte p heeft als vergelijking $y = 2x + 3$.

- het snijpunt met de y -as is $(0, 3)$:
Stel $x = 0$ dan wordt: $y = 2 \cdot 0 + 3$
 $y = 3$
- Stel $x = 1$ dan wordt: $y = 2 \cdot 1 + 3$
 $y = 2 + 3$
 $y = 5$

De punten $(0, 3)$ en $(1, 5)$ liggen op de rechte p .



Hoe teken je een rechte als de vergelijking gegeven is?

methode

STAP 1: Kies twee x -waarden.

STAP 2: Bereken met behulp van de vergelijking de bijhorende y -waarden en bepaal zo de coördinaat van twee punten op de rechte.

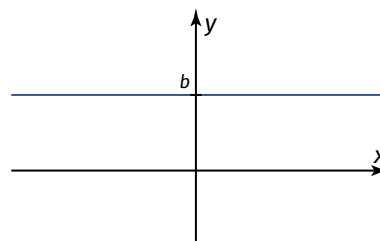
STAP 3: Plaats de twee punten in een assenstelsel.

STAP 4: Teken de rechte door deze twee punten.



— Merk op —

- De grafiek van een **constante functie** is een **horizontale rechte** met een vergelijking van de vorm $y = b$. Alle punten op deze rechte hebben eenzelfde y -coördinaat, namelijk b .
- Van elke rechte kan je een vergelijking bepalen, maar **niet elke rechte is de grafiek van een functie**. Denk maar aan een rechte evenwijdig aan de y -as. Daar leer je in punt 2 meer over.



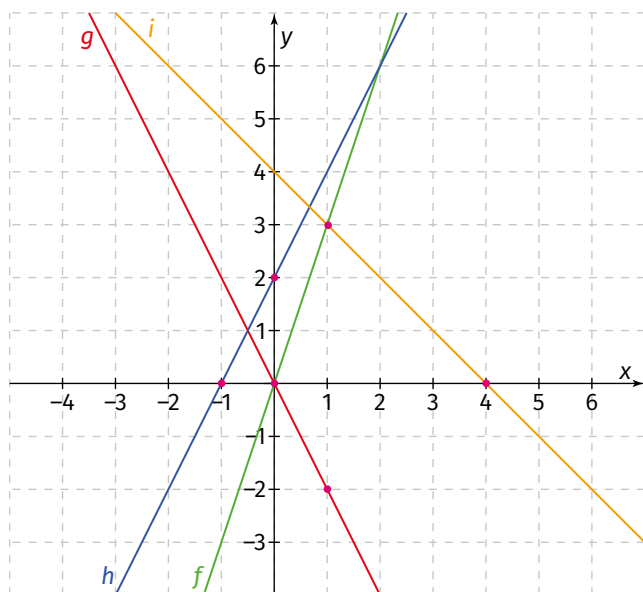


Verwerkingsopdrachten



1

Bepaal de vergelijking van de getekende rechten.



$$f \leftrightarrow y = 3x$$

$$g \leftrightarrow y = -2x$$

$$h \leftrightarrow y = 2x + 2$$

$$i \leftrightarrow y = -x + 4$$

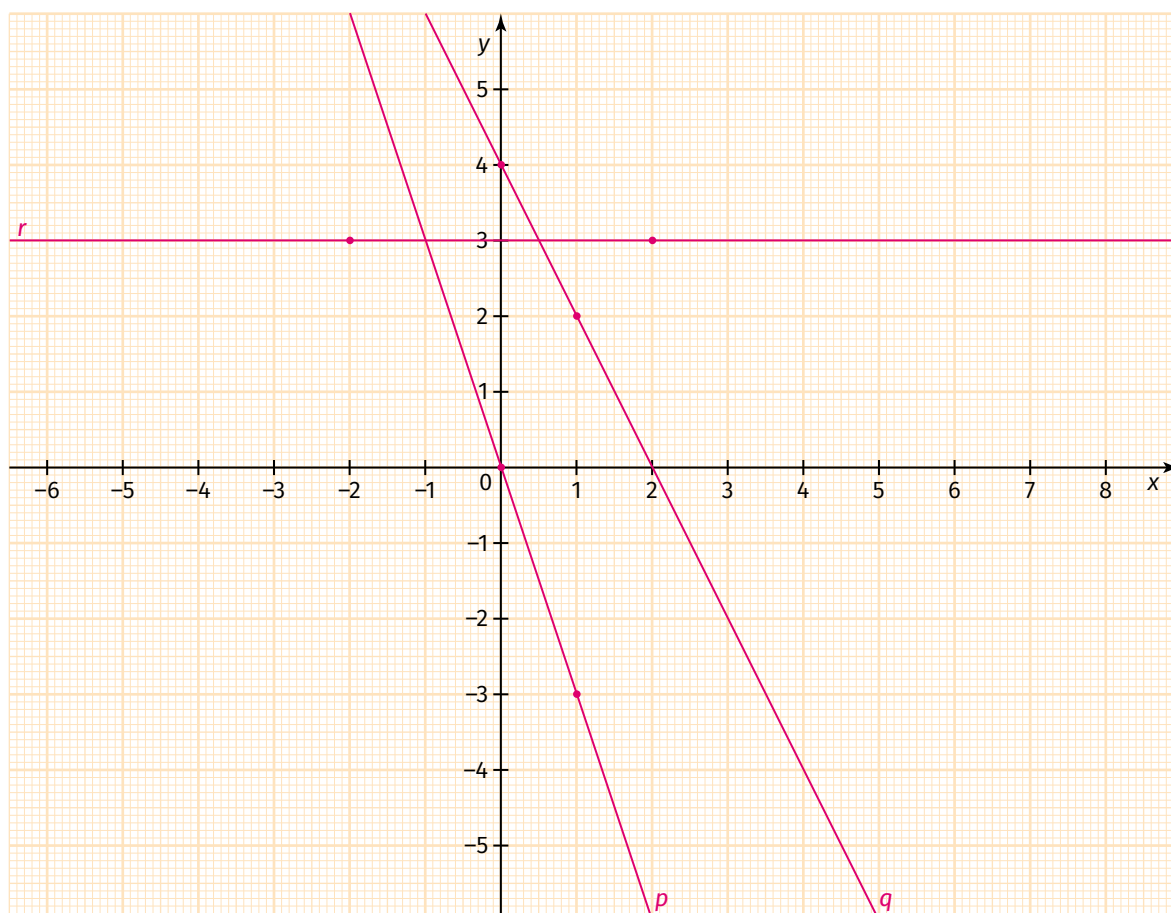
2

Teken de rechten p , q en r .

$$p \leftrightarrow y = -3x$$

$$q \leftrightarrow y = -2x + 4$$

$$r \leftrightarrow y = 3$$



2 Rechten evenwijdig met één van de assen

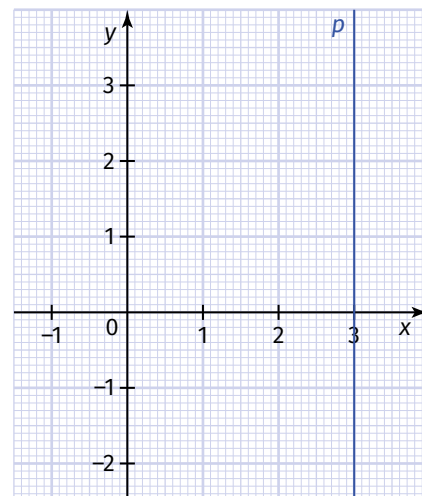
Bij een rechte evenwijdig met de y-as is de x-waarde voor de verschillende y-waarden altijd hetzelfde.

Voorbeeld

De vergelijking van de rechte p is $x = 3$.

x	3	3	3	3	3
y	-2	-1	0	1	2

De x-waarde van alle punten is dus constant, namelijk $x = c$.



— Merk op —

- Een rechte evenwijdig met de y-as is **geen grafiek van een functie**.
- Je kunt de vergelijking niet schrijven in de vorm $y = ax + b$ want de richtingscoëfficiënt bestaat niet.

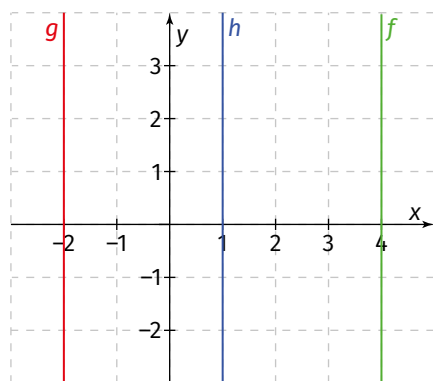


Verwerkingsopdrachten



3

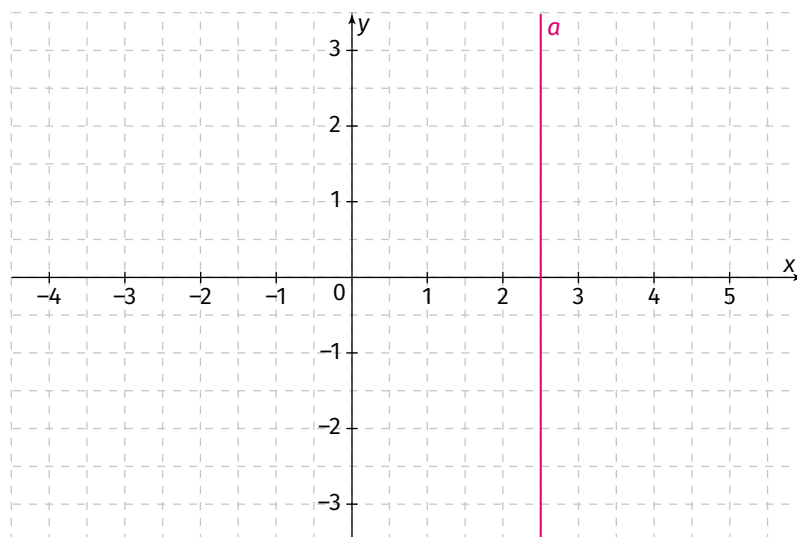
Bepaal de vergelijking van de gegeven rechten.



$$\begin{aligned} f &\leftrightarrow x = 4 \\ g &\leftrightarrow x = -2 \\ h &\leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

4

Teken de rechte a met als vergelijking $x = 2,5$.



3 De cartesische vergelijking van een rechte opstellen

3.1 Als de richtingscoëfficiënt en één punt gegeven zijn

Voorbeeld

Beschouw de rechte c door het punt $P(2, 3)$ en met $a = 4$ als richtingscoëfficiënt.

$$y = ax + b \quad \text{wordt:} \quad y = 4x + b$$

We bepalen b door de coördinaat van het gegeven punt P in te vullen.

$$y = 4x + b$$

$$3 = 4 \cdot 2 + b$$

$$3 = 8 + b$$

$$-5 = b$$

We krijgen dus: $y = 4x - 5$

De vergelijking van de rechte c is $y = 4x - 5$.

Algemeen

De rechte f gaat door het punt $P(x_1, y_1)$ en heeft a als richtingscoëfficiënt.

De rechte f heeft een vergelijking van de vorm $y = ax + b$.

We bepalen de waarde van b door het punt $P(x_1, y_1)$ in de vergelijking in te vullen.

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$b = y_1 - ax_1$$

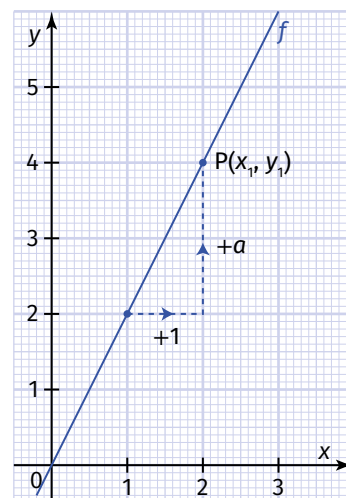
We krijgen dus:

$$y = ax + b$$

$$y = ax + y_1 - ax_1$$

$$y - y_1 = ax - ax_1$$

$$y - y_1 = a \cdot (x - x_1)$$



formule De vergelijking van een rechte door het punt $P(x_1, y_1)$ en met richtingscoëfficiënt a is:

$$y - y_1 = a \cdot (x - x_1).$$



— Merk op —

Er is een verband tussen de richtingscoëfficiënt en de onderlinge ligging van 2 rechten:

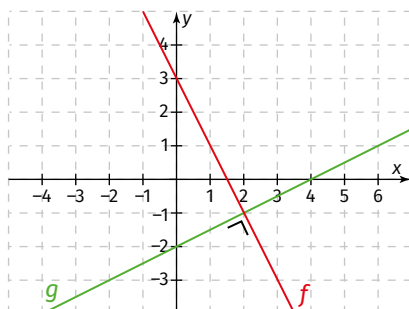
- Twee rechten die de y -as snijden zijn evenwijdig als en slechts als hun richtingscoëfficiënt gelijk is.
 $a \not\parallel y \wedge b \not\parallel y \Leftrightarrow \text{rico } a = \text{rico } b$
- Als twee rechten loodrecht op elkaar staan, dan is het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk aan -1 .

Voorbeeld

$$f \perp g$$

$$a_f = -2$$

$$a_g = \frac{1}{2}$$



3.2 Als twee punten gegeven zijn

Voorbeeld

Beschouw de rechte d die door de punten $P(2, 3)$ en $Q(4, -2)$ gaat.

We bepalen a .

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$y - 3 = a(x - 2)$$

$$-2 - 3 = a(4 - 2)$$

$$-5 = 2a$$

$$\frac{-5}{2} = a$$

We krijgen: $y = \frac{-5}{2}x + 8$

De vergelijking van de rechte d is $y = \frac{-5}{2}x + 8$.

We bepalen b .

$$y = \frac{-5}{2}x + b$$

$$3 = \frac{-5}{2} \cdot 2 + b$$

$$3 = -5 + b$$

$$8 = b$$

Algemeen

De rechte f gaat door de punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ en $x_1 \neq x_2$.

We bepalen a .

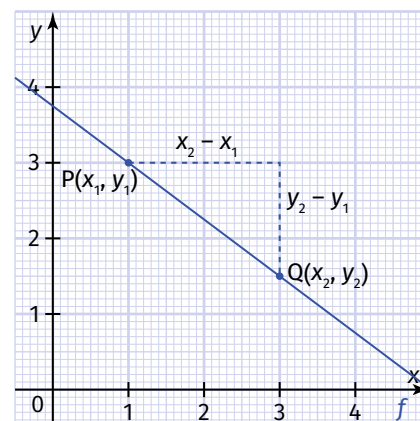
$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

We krijgen dus:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



formule De vergelijking van een rechte door de punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ met $x_1 \neq x_2$ is:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

De richtingscoëfficiënt van een rechte door de punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ met $x_1 \neq x_2$ is:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



— Merk op —

- Als $y_2 = y_1$ dan wordt de teller in de formule van de richtingscoëfficiënt 0. Dat betekent dat je een horizontale rechte hebt. Bijgevolg is de vergelijking van deze rechte $y = y_1$.
- Als $x_2 = x_1$ dan wordt de noemer in de formule van de richtingscoëfficiënt 0. Dat betekent dat je een verticale rechte hebt (de richtingscoëfficiënt bestaat niet). Bijgevolg is de vergelijking van deze rechte $x = x_1$.
- De richtingscoëfficiënt wordt ook het **differentiequotient** genoemd omdat $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Dat beschrijft de gemiddelde veranderingen over een interval. De toename van x is recht evenredig met de toename van y .



Verwerkingsopdrachten



5

Bepaal de cartesische vergelijking van ...

a) de rechte a met richtingscoëfficiënt 3 die door het punt $A(1, 5)$ gaat.

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

$$y - 5 = 3(x - 1)$$

$$y - 5 = 3x - 3$$

$$y = 3x + 2$$

b) de rechte b met richtingscoëfficiënt -2 die door het punt $B(2, -4)$ gaat.

$$y - y_B = a(x - x_B)$$

$$y - (-4) = (-2)(x - 2)$$

$$y + 4 = -2x + 4$$

$$y = -2x$$

c) de rechte c die door de punten $C(1, -2)$ en $D(2, -3)$ gaat.

$$y - y_C = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}(x - x_C)$$

$$y - (-2) = \frac{-3 - (-2)}{2 - 1}(x - 1)$$

$$y + 2 = (-1)(x - 1)$$

$$y + 2 = -x + 1$$

$$y = -x - 1$$

d) de rechte d die door het punt $E(5, 0)$ gaat en loodrecht staat op $i \leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - 4$.

$$y - y_E = a(x - x_E)$$

$$y - 0 = -3(x - 5)$$

$$y = -3x + 15$$

e) de rechte e die door het punt $F(0, 4)$ en het punt $G(4, -2)$ gaat.

$$y - y_F = \frac{y_G - y_F}{x_G - x_F}(x - x_F)$$

$$y - 4 = \frac{-2 - 4}{4 - 0}(x - 0)$$

$$y - 4 = -1,5(x - 0)$$

$$y - 4 = -1,5x$$

$$y = -1,5x + 4$$

f) de rechte f die door de oorsprong en het punt $H(5, -3)$ gaat.

$$y - y_0 = \frac{y_H - y_0}{x_H - x_0}(x - x_0)$$

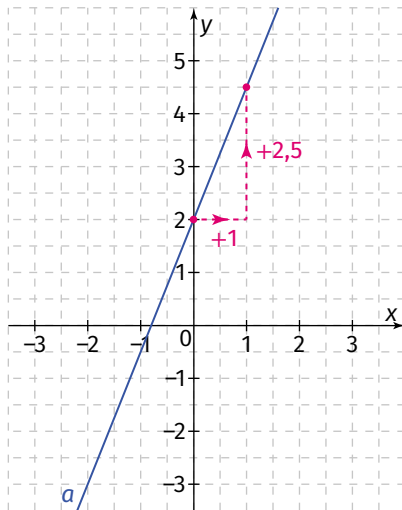
$$y - 0 = \frac{-3 - 0}{5 - 0}(x - 0)$$

$$y = \frac{-3}{5}(x - 0)$$

$$y = \frac{-3}{5}x$$

6

Geef de cartesische vergelijking van de rechte waarvan de volgende grafiek gegeven is.



$$a \leftrightarrow y = 2,5x + 2$$

7

Onderzoek of de volgende punten op één rechte liggen.

A(-2, 0), B(-3, -3) en C(1, 5)

- Stel de vergelijking van AB op.

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

$$y - 0 = \frac{-3 - 0}{-3 - (-2)} (x - (-2))$$

$$y = \frac{-3}{-1} (x + 2)$$

$$y = 3(x + 2)$$

$$y = 3x + 6$$

- Controleer of de coördinaat van C voldoet aan de vergelijking van AB.

$$5 \stackrel{?}{=} 3 \cdot 1 + 6$$

$$5 \neq 9$$

Antwoord: De punten A, B en C liggen niet op één rechte.

8

Kleur alle evenwijdige rechten in eenzelfde kleur.

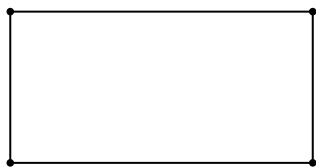
$y = 2x$	$y = \frac{4x + 5}{2}$	$y = -2x + 3$	$y = 0,5x + 3$
$y = \frac{1}{2}x$	$y = 3x + 2$	$y = x$	$y = -3x + 2$
$y = x - \frac{1}{2}$	$y = -3x + 0,5$	$y = 2x - 3$	$y = -2x$

4 De algemene vergelijking van een rechte

4.1 Vergelijking van de vorm $ux + vy + w = 0$

Voorbeeld

Zoek de afmetingen van alle rechthoeken waarvan de omtrek 318 m is.



x : lengte van de rechthoek

y : breedte van de rechthoek

We stellen vast dat $2x + 2y = 318$.

$2x + 2y = 318$ is een vergelijking van de vorm $ux + vy + w = 0$ met $u = 2$; $v = 2$ en $w = -318$, want we kunnen dit omvormen naar $2x + 2y - 318 = 0$.

definitie $ux + vy + w = 0$ met u, v en $w \in \mathbb{R}$ (waarbij u en v niet tegelijk nul zijn) noemt men de **algemene vergelijking** van een rechte.

We kunnen vergelijkingen van de vorm $y = ax + b$ en $x = c$ herschrijven in de vorm $ux + vy + w = 0$.

A) Rechten die de y -as snijden

Voorbeelden

- $y = 2x + 1$ wordt: $2x - y + 1 = 0$
- $y = 3$ wordt: $0x + y - 3 = 0$
 $y - 3 = 0$

B) Rechten evenwijdig met de y -as

Voorbeelden

- $x = 2$ wordt: $x + 0y - 2 = 0$
 $x - 2 = 0$



— Merk op —

De coëfficiënten u en v mogen niet tegelijk gelijk zijn aan 0. Als $u = v = 0$ dan is $ux + vy + w = 0$ geen vergelijking van een rechte want dan krijgen we $0x + 0y + w = 0$ en:

- Als $w \neq 0$ heeft deze vergelijking geen oplossing.
- Als $w = 0$ is elk koppel reële getallen een oplossing.

4.2 Verband tussen de algemene vergelijking van een rechte en de vorm $y = ax + b$

We onderzoeken het verband tussen de algemene vergelijking van een rechte $ux + vy + w = 0$ en de vorm $y = ax + b$.

A) Geval 1: $v \neq 0$

$$ux + vy + w = 0$$

$$vy = -ux - w$$

$$y = \frac{-u}{v}x - \frac{w}{v}$$

$$y = \frac{-u}{v}x + \left(\frac{-w}{v}\right)$$

Vaststelling

De rechte heeft als richtingscoëfficiënt $a = \frac{-u}{v}$ en $b = \frac{-w}{v}$. Het snijpunt van de rechte met de y-as is $\left(0, \frac{-w}{v}\right)$.



— Merk op —

Als $w = 0$, dan wordt de vergelijking $y = \frac{-u}{v}x$. Dat is de vergelijking van een rechte door de oorsprong.

Als $u = 0$, dan wordt de vergelijking $y = \frac{-w}{v}$. Dat is de vergelijking van een rechte die de grafiek is van een constante functie.

B) Geval 2: $v = 0$

$$ux + vy + w = 0$$

$$ux + 0y + w = 0$$

$$ux = -w$$

$$x = \frac{-w}{u}$$

Vaststelling

Dit is de vergelijking van een rechte evenwijdig met de y-as.



Verwerkingsopdrachten



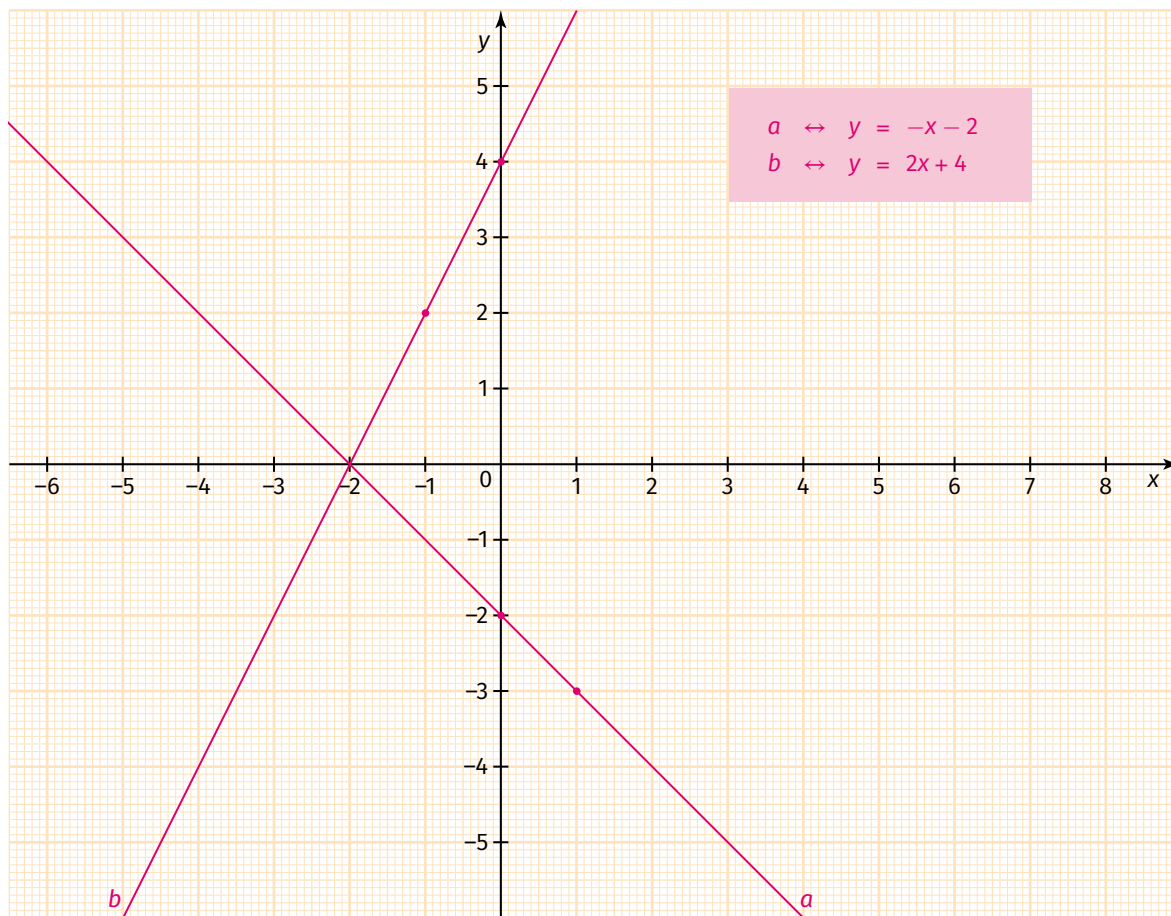
5, 6, 7

9

Teken de grafiek van de rechten a en b . Herleid de vergelijkingen eerst tot de vorm $y = ax + b$.

$$a \leftrightarrow x + y + 2 = 0$$

$$b \leftrightarrow -2x + y - 4 = 0$$



10

Duid alle punten aan die liggen op de rechte $a \leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$.

(2, 0)	(0, 0)	(-2, 0)
(1, 2)	(3, 2)	(0, -4)

11

Zet onderstaande vergelijkingen om naar de algemene vorm van een vergelijking van een rechte.

a) $y = x + 3$ $x - y + 3 = 0$

b) $y = \frac{3x - 1}{2}$ $2y = 3x - 1$
 $3x - 2y - 1 = 0$

c) $y = -2x$ $2x + y = 0$

12

Bepaal de richtingscoëfficiënt en het snijpunt met de y -as van de gegeven vergelijkingen.

a) $4x - 2y + 3 = 0$

$$a = \frac{-u}{v} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$b = \frac{-w}{v} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Antwoord: De richtingscoëfficiënt is 2 en het snijpunt met de y -as is $(0, \frac{3}{2})$.

b) $-3x - y + 1 = 0$

$$a = \frac{-u}{v} = \frac{-(-3)}{-1} = -3$$

$$b = \frac{-w}{v} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Antwoord: De richtingscoëfficiënt is -3 en het snijpunt met de y -as is $(0, 1)$.

c) $x + 3y - 5 = 0$

$$a = \frac{-u}{v} = \frac{-1}{3}$$

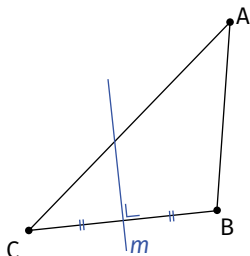
$$b = \frac{-w}{v} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{5}{3}$$

Antwoord: De richtingscoëfficiënt is $-\frac{1}{3}$ en het snijpunt met de y -as is $(0, \frac{5}{3})$.

5 Merkwaardige lijnen

5.1 Definities en eigenschappen

definitie Een **middelloodlijn** in een driehoek is een rechte die door het midden van een zijde gaat en loodrecht staat op de drager van die zijde.



definitie Een **zwaartelij**n in een driehoek is een rechte die door een hoekpunt en door het midden van de overstaande zijde gaat.

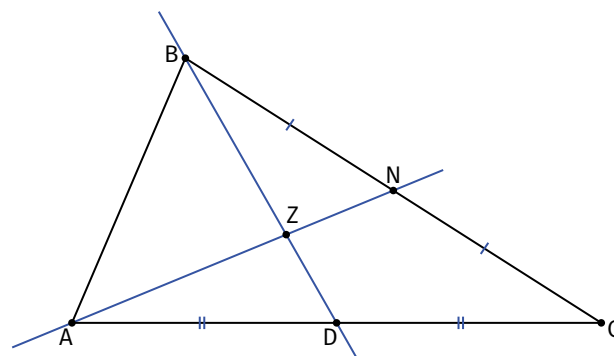
eigenschap

IN WOORDEN

Het zwaartepunt van een driehoek verdeelt elke zwaartelij n in twee stukken die zich verhouden als 2:1.

IN SYMBOLEN

$$\frac{|AZ|}{|ZN|} = \frac{|BZ|}{|ZD|} = \frac{2}{1}$$



definitie Een **bissectrice** in een driehoek is een rechte die door een hoekpunt gaat en de bijhorende hoek in twee even grote hoeken verdeelt.

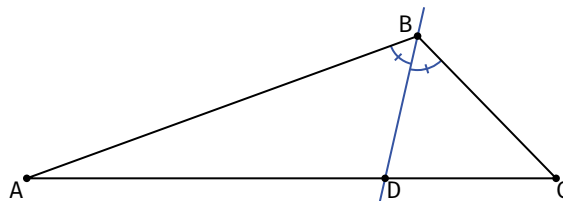
eigenschap

IN WOORDEN

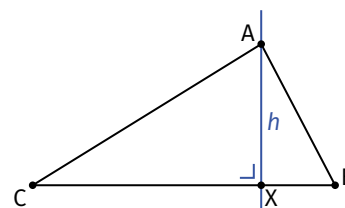
In een driehoek verdeelt de bissectrice van een hoek de overstaande zijde in stukken die evenredig zijn met de aanliggende zijden.

IN SYMBOLEN

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$



definitie Een **hoogtelij**n in een driehoek is een loodlijn uit een hoekpunt op de drager van overstaande zijde.



In een eerdere module formuleerden we deze eigenschap voor de hoogte in een rechthoekige driehoek:

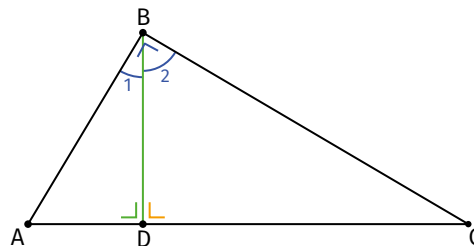
eigenschap

IN WOORDEN

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de lengte van de hoogtelij n op de schuine zijde gelijk aan het product van de lengte van de loodrechte projecties van de rechthoekszijden op de schuine zijde.

IN SYMBOLEN

$$|BD|^2 = |AD| \cdot |DC|$$



— **Merk op** —

Je kan deze merkwaardige lijnen met ICT tekenen al dan niet door gebruik te maken van de definitie of de eigenschappen.

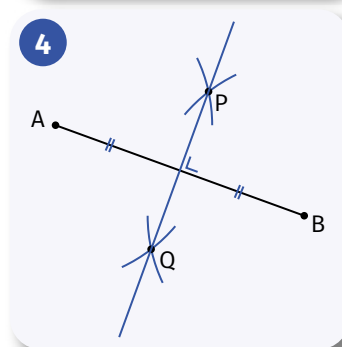
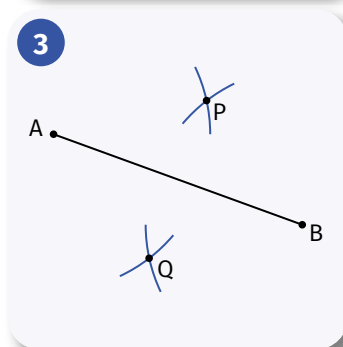
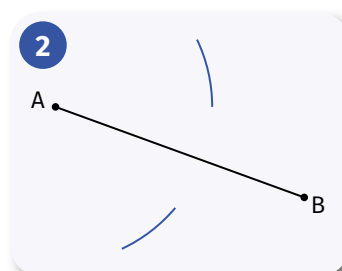
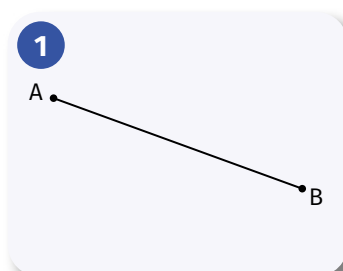
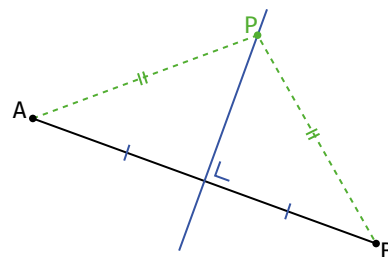
5.2 Constructie van de middelloodlijn

In het tweede jaar leerde je het kenmerk van de middelloodlijn.

eigenschap

KENMERK VAN EEN MIDDELLOODLIJN

Een punt ligt op de middelloodlijn als en slechts als het even ver ligt van de grenspunten van dat lijnstuk.



Hoe construeer je de middelloodlijn van een lijnstuk [AB]?

methode

STAP 1: Teken een lijnstuk [AB].

STAP 2: Plaats je passerpunt in A en teken twee boogjes met dezelfde passeropening aan beide zijden van [AB].
De passeropening moet groter zijn dan de helft van [AB].

STAP 3: Plaats je passerpunt in B en teken met dezelfde passeropening opnieuw twee boogjes aan beide zijden van [AB].
Noem de snijpunten P en Q.

STAP 4: De rechte PQ is de middelloodlijn van [AB].

Verklaring

$$|PA| = |PB| \text{ en } |QA| = |QB|$$

$\Updownarrow$ (kenmerk middelloodlijn)

P en Q liggen op de middelloodlijn van [AB]

$\Updownarrow$

PQ is de middelloodlijn van [AB]

5.3 Omgeschreven cirkel van een driehoek

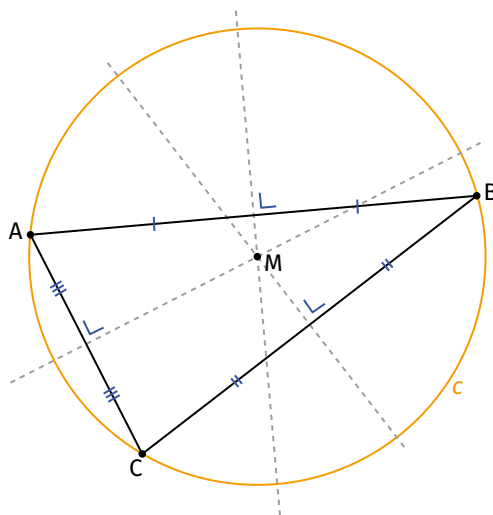
Gegeven: een driehoek $\triangle ABC$

Gevraagd: de omgeschreven cirkel c aan $\triangle ABC$

Oplossing:

Als M het middelpunt is van de omgeschreven cirkel, dan geldt $|MA| = |MB| = |MC|$.

M.a.w. M ligt op de middelloodlijn van $[AB]$, op de middelloodlijn van $[BC]$ en op de middelloodlijn van $[AC]$.



Hoe construeer je een omgeschreven cirkel in een driehoek?

methode

- STAP 1: Teken de drie middelloodlijnen van de driehoek.
- STAP 2: M is het snijpunt van de middelloodlijnen.
- STAP 3: $|MA| = |MB| = |MC| = r$ is de straal van de omgeschreven cirkel.
- STAP 4: Teken $c_{(M, r)}$.



— Merk op —

Om de omgeschreven cirkel van een driehoek te tekenen, volstaat het om twee middelloodlijnen te tekenen. De derde middelloodlijn kan je gebruiken als controle.

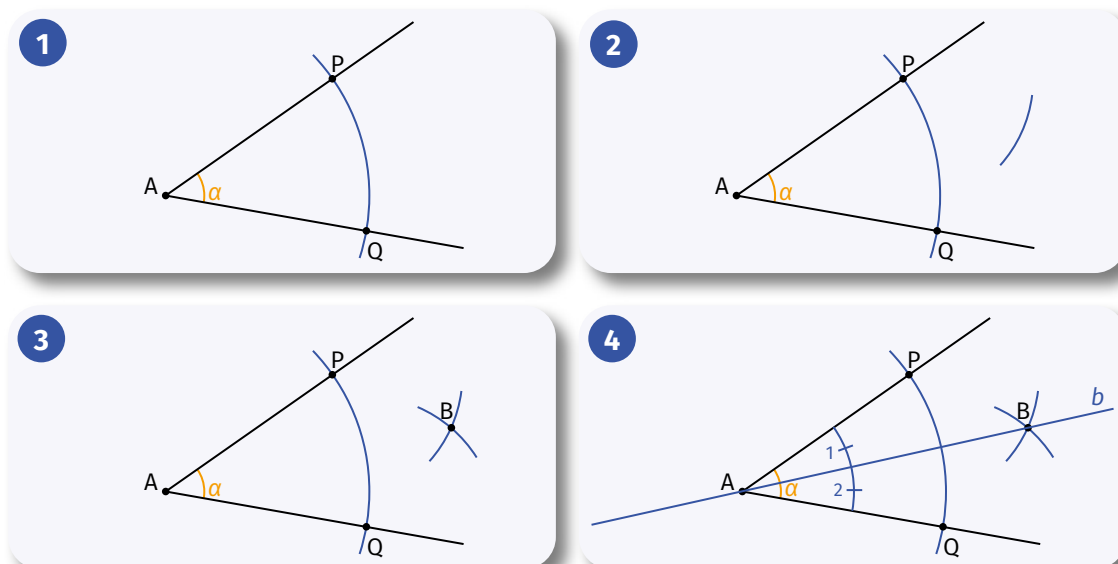
5.4 Constructie van de bissectrice

In het tweede jaar leerde je het kenmerk van de bissectrice.

eigenschap

KENMERK VAN DE BISSECTRICE

Een punt ligt op de bissectrice van een hoek **als en slechts als** het punt op gelijke afstand ligt van beide benen van die hoek.



Hoe construeer je de bissectrice van een hoek $\hat{A}$?

methode

STAP 1: Plaats je passerpunt in het hoekpunt A en teken een cirkelboog zodat je een snijpunt bekomt met elk been van de hoek. Noem deze snijpunten P en Q.

STAP 2: Plaats je passerpunt in P en teken een cirkelboog. De passeropening is groter dan $\frac{|PQ|}{2}$.

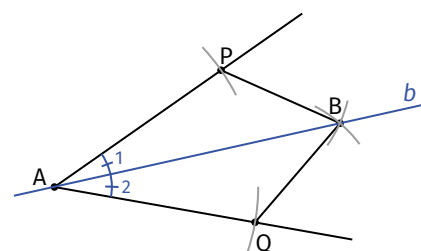
STAP 3: Plaats je passerpunt in Q en teken met dezelfde passeropening een cirkelboog. Beide cirkelbogen snijden elkaar. Noem dit punt B.

STAP 4: Teken een rechte door A en B. Dit is de bissectrice van $\hat{A}$.

Verklaring

In $\triangle APB$ en $\triangle AQB$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} |AP| = |AQ| \quad (\text{constructie}) \\ |PB| = |QB| \quad (\text{constructie}) \\ |AB| = |AB| \quad (\text{gemeenschappelijke zijde}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xRightarrow{ZZZ} \triangle APB \cong \triangle AQB \\ \Downarrow \quad (\text{definitie congruente driehoeken}) \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array}$$



5.5 Ingeschreven cirkel van een driehoek

Gegeven: een driehoek $\triangle ABC$

Gevraagd: de ingeschreven cirkel c aan $\triangle ABC$

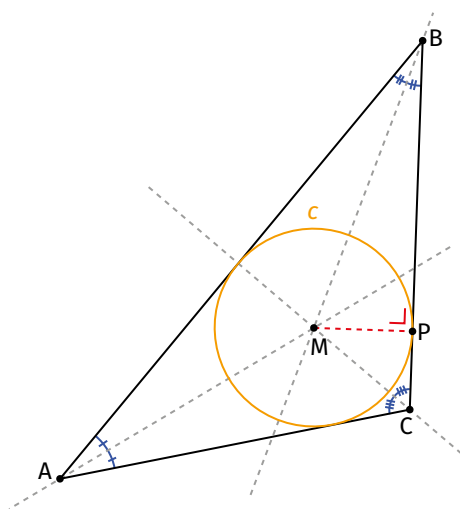
Oplossing:

Als M het middelpunt is van de ingeschreven cirkel, dan geldt $d(M, AB) = d(M, BC) = d(M, AC)$.

M.a.w. M ligt op de bissectrice van $\hat{A}$,
op de bissectrice van $\hat{B}$,
en op de bissectrice van $\hat{C}$.



TIP $d(M, AB)$ lees je als:
de afstand van het punt
 M tot de rechte AB .



Hoe construeer je een ingeschreven cirkel in een driehoek?

methode

- STAP 1: Teken de bissectrice in elke hoek van de driehoek.
- STAP 2: M is het snijpunt van de bissectrices.
- STAP 3: Teken uit M een loodlijn op één van de zijden.
- STAP 4: P is het snijpunt van deze loodlijn met de zijde.
- STAP 5: $|MP| = r$ is de straal van de ingeschreven cirkel.
- STAP 6: Teken $c_{(M, r)}$.



— Merk op —

Om de ingeschreven cirkel van een driehoek te tekenen, volstaat het om twee bissectrices te tekenen. De derde bissectrice kan je gebruiken als controle.

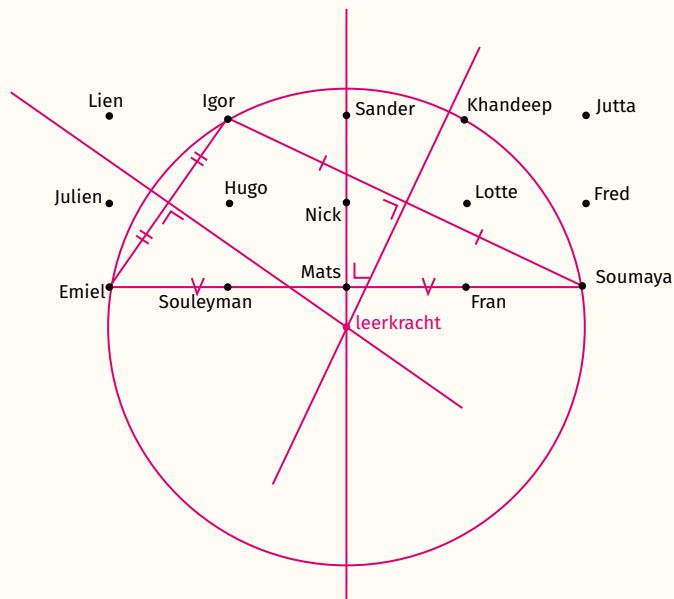


Verwerkingsopdrachten



13

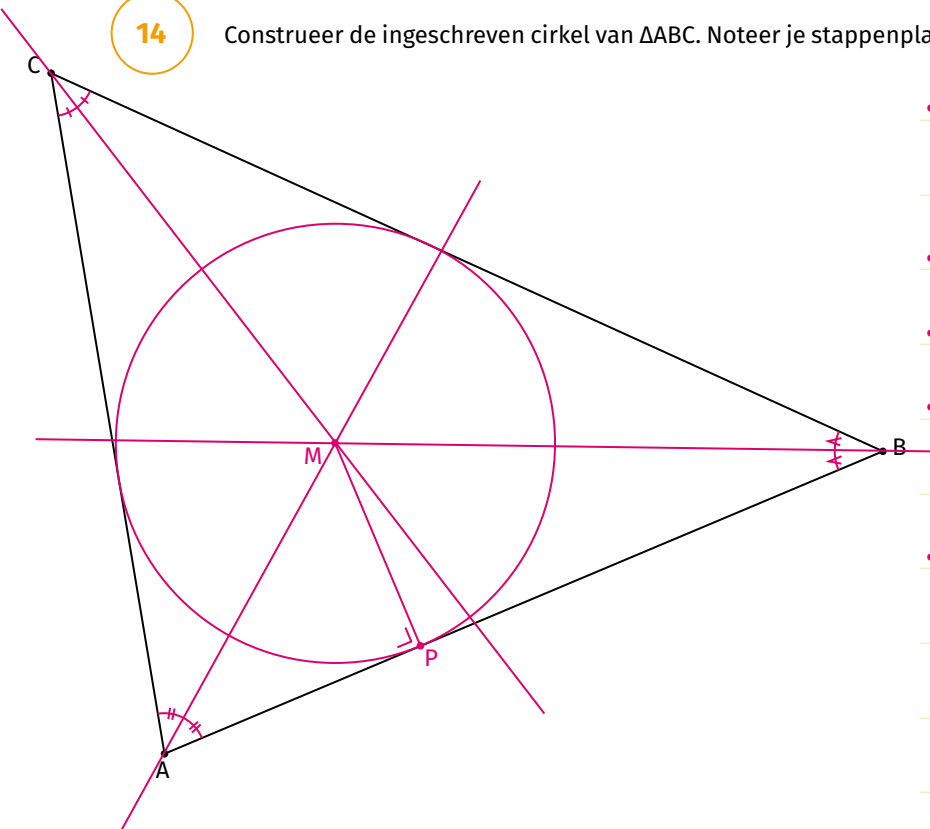
Een leerkracht kan de apparaten van de leerlingen volgen via bluetooth. Zo kan hij controleren of de leerlingen effectief met de les bezig zijn. Hij kan nog net Emiel, Igor en Soumaya zien via de app. Welke leerlingen zal de leerkracht niet meer kunnen zien op de app?



Antwoord: De leerkracht kan het apparaat van Julien, Fred, Lien en Jutta niet meer zien op de app.

14

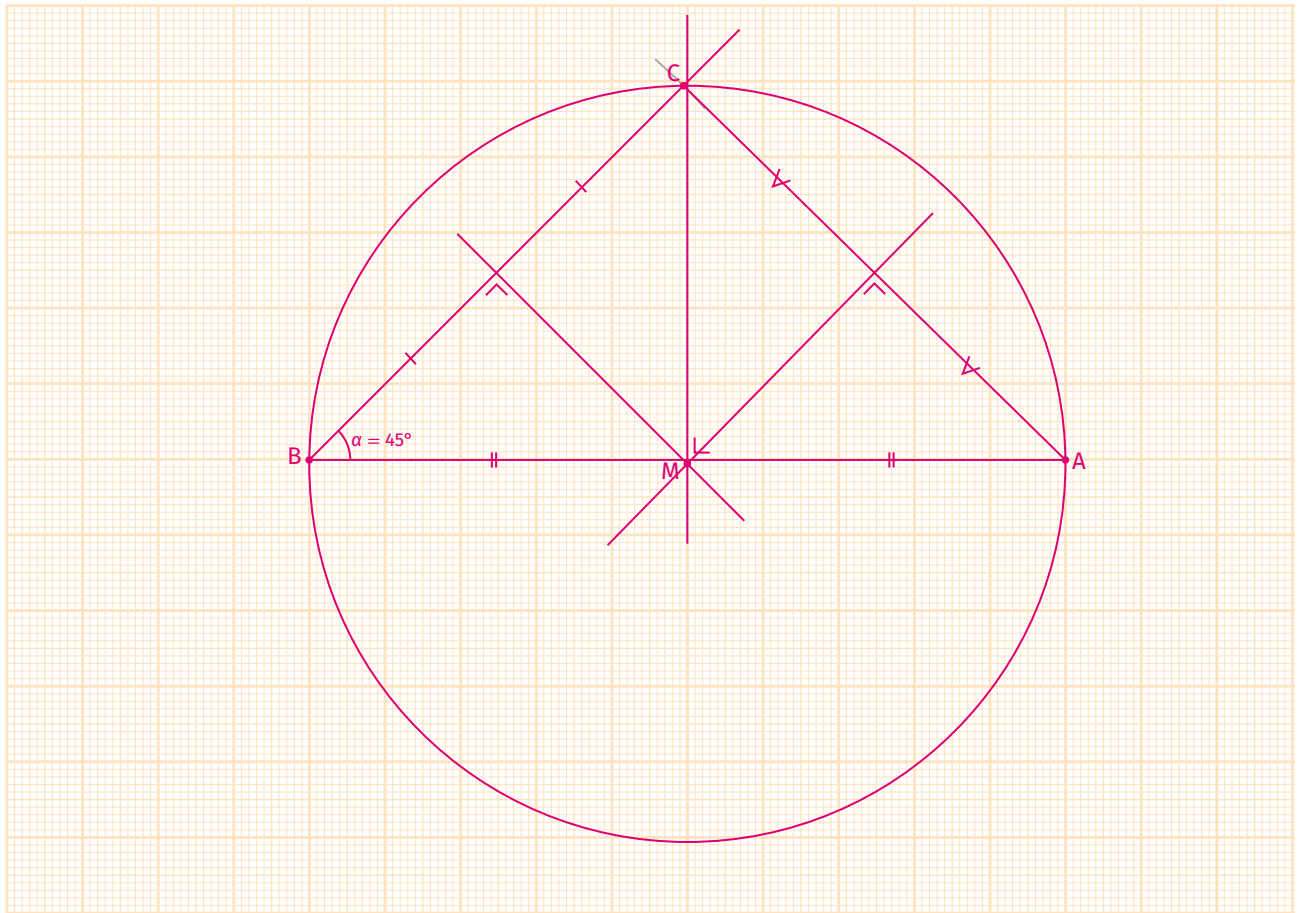
Construeer de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Noteer je stappenplan.



- Teken de bissectrice in elke hoek van de driehoek.
- M is het snijpunt van de bissectrices.
- Teken uit M de loodlijn op de zijde [AB].
- P is het snijpunt van deze loodlijn met de zijde.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MP|$, deze cirkel is de ingeschreven cirkel.

15

Teken de omgeschreven cirkel van driehoek ABC met $|AB| = 10$, $|BC| = 7$ en $\widehat{B} = 45^\circ$.



16

Gegeven: $A(3, 5)$, $B(-2, -1)$ en $C(1, -4)$

Gevraagd: Geef de cartesische vergelijking van de zwaartelijn uit A.

Zwaartelijn uit A gaat door het midden van $[BC]$:

$$\text{co}(M) = \left(\frac{-2+1}{2}, \frac{-1+(-4)}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2} \right)$$

De zwaartelijn gaat door $A(3, 5)$ en $M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{-\frac{5}{2} - 5}{-\frac{1}{2} - 3} (x - 3)$$

$$y - 5 = \frac{-\frac{15}{2}}{-\frac{7}{2}} (x - 3)$$

$$y - 5 = \frac{15}{7} (x - 3)$$

$$y - 5 = \frac{15}{7} x - \frac{45}{7}$$

$$y = \frac{15}{7} x - \frac{10}{7}$$

6 Vectoriële en parametrische vergelijkingen van een rechte

6.1 Rechte door de oorsprong

De rechte l gaat door de oorsprong. We nemen een willekeurig punt B op de rechte l . We tekenen de plaatsvector $\vec{OB} = \vec{B}$.

Elk punt op de rechte l ligt in het verlengde van de vector $\vec{B}$.
Alle plaatsvectoren op de rechte l hebben dezelfde richting als $\vec{B}$.

We beschouwen de vectoren $\vec{C}$ en $\vec{D}$.

- Vector $\vec{C}$ is twee keer langer dan $\vec{B}$ en heeft dezelfde zin.

$$\vec{C} = 2 \cdot \vec{B}$$

$$(8, 4) = 2 \cdot (4, 2)$$

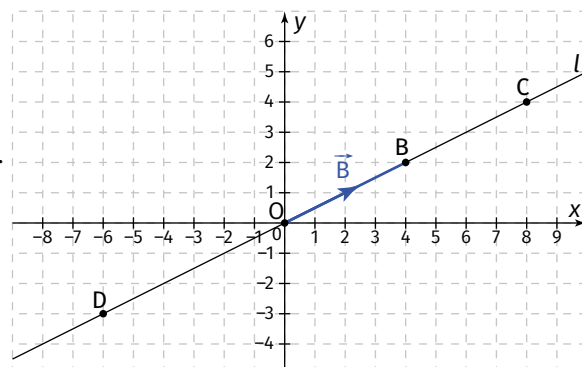
- Vector $\vec{D}$ is anderhalve keer langer dan $\vec{B}$ maar heeft een tegengestelde zin.

$$\vec{D} = -1,5 \cdot \vec{B}$$

$$(-6, -3) = -1,5 \cdot (4, 2)$$

Een willekeurig punt P dat op de rechte l ligt, heeft een plaatsvector $\vec{P}$ die het product is van de gekozen vector $\vec{B}$ met een reëel getal k .

$\vec{P}$ is dus een reëel veelvoud van $\vec{B}$.



notatie $\vec{P} = k \cdot \vec{B}$ met $k \in \mathbb{R}$

Dit noemt men een **vectoriële vergelijking** van de rechte l .

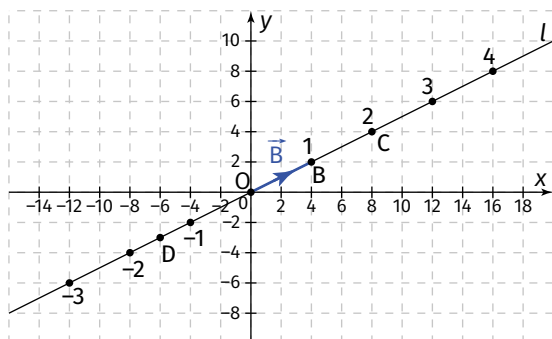
De waarde van k kan gelijk welk reëel getal zijn. k noemt men een parameter.

De gekozen vector $\vec{B}$ noemt men een **richtvector** van de rechte l .

Elke waarde van k komt overeen met één punt op de rechte l . Omgekeerd hoort er bij elk punt van de rechte l juist één waarde van k . Met behulp van de parameter k kunnen we de rechte l voorstellen als een getallenas. Elk punt op de getallenas komt overeen met één reëel getal.

Voorbeeld

De oorsprong O is het punt waarvoor $k = 0$. Het gekozen punt B is het punt waarvoor $k = 1$. De rechte l stellen we voor door een getallenas met als lengte-eenheid $|\vec{OB}|$. $\vec{OB}$ is een richtvector van de rechte l (rechte OB).



We kunnen ook een **parametrische vergelijking** van een rechte opstellen. Deze is verwant met de vectoriële vergelijking, maar verschilt in schrijfwijze omdat we gebruik maken van coördinaten.

De coördinaat van de vector $\overrightarrow{OB}$ is $(4, 2)$. Als we die vectoriële vergelijking van de rechte l uitdrukken met coördinaten krijgen we:

$$\vec{P} = k \cdot \vec{B} \quad \text{met } k \in \mathbb{R}$$

$$(x, y) = k \cdot (4, 2)$$

$$(x, y) = (4k, 2k)$$

Dat is de parametrische vergelijking van een rechte.

We kunnen nu de cartesische vergelijking van de rechte l opstellen:

$$\begin{array}{l} x = 4k \quad \wedge \quad y = 2k \\ \underbrace{\frac{x}{4} = k \quad \wedge \quad \frac{y}{2} = k}_{\Downarrow} \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} \\ x = 2y \\ \frac{1}{2}x = y \end{array}$$

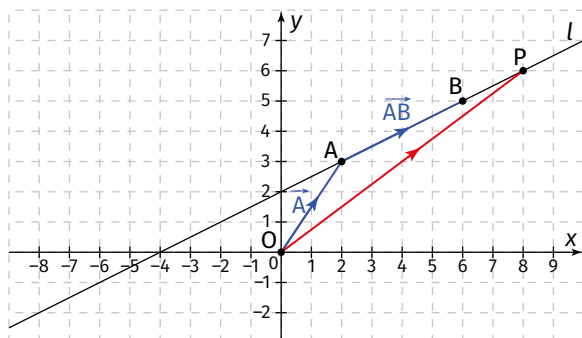


— **Merk op** —

- Een rechte heeft oneindig veel richtvectoren. Alle richtvectoren zijn veelvoud van $\overrightarrow{OB}$ met een reëel getal k . We beschouwen de rechte als een getallenas waarop we zelf de lengte-eenheid en de oriëntatie kiezen.
- De parametrische en vectoriële vergelijking zijn niet uniek.
- De nulvector is **geen** richtvector.
- We gebruiken meestal de letter k als parameter. De letters l , r , s of t worden ook als parameters gebruikt bij vectoriële vergelijkingen. Zo wordt de letter t gebruikt voor het tijdstip waarop een deeltje zich in een bepaald punt bevindt.
- De coördinaat van een richtvector noemt men ook een stel **richtingsgetallen**.

6.2 Willekeurige rechte (niet door de oorsprong)

Beschouw de rechte l die niet door de oorsprong gaat. Neem twee verschillende punten A en B op deze rechte. De punten A en B bepalen precies één rechte en één vector $\vec{AB}$.



Kiezen we nu een willekeurig punt P op de rechte l , dan kunnen we de puntvector $\vec{P}$ op deze rechte in twee stappen tekenen.

Stap 1: Teken een vector vanuit de oorsprong O tot aan het punt A. Dit is de vector $\vec{OA} = \vec{A}$.

Stap 2: Tel vervolgens de vector $\vec{AP}$ er bij op. $\vec{AP}$ ligt in het verlengde van $\vec{AB}$, dus $\vec{AP}$ is het product van $\vec{AB}$ met een reëel getal k .

We krijgen dus:

notatie

$$\vec{P} = \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$$\vec{P} = \vec{OA} + k \cdot \vec{AB} \quad \text{met } k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{P} = \vec{A} + k \cdot \vec{AB}$$

Voorbeeld

De vector $\vec{AB}$ is een richtvector van de rechte l (rechte AB).

De coördinaat van de vector $\vec{AB}$ is (4, 2).

Als we de vectoriële vergelijking van de rechte l uitdrukken met coördinaten krijgen we:

$$\vec{P} = \vec{A} + k \cdot \vec{AB} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$(x, y) = (2, 3) + k \cdot (4, 2)$$

$$(x, y) = (2, 3) + (4k, 2k)$$

$$(x, y) = (2 + 4k, 3 + 2k)$$

We stellen de vergelijking van de rechte l op:

$$\begin{array}{ll} x = 2 + 4k & \text{en} \quad y = 3 + 2k \\ x - 2 = 4k & y - 3 = 2k \\ \frac{x - 2}{4} = k & \frac{y - 3}{2} = k \end{array}$$

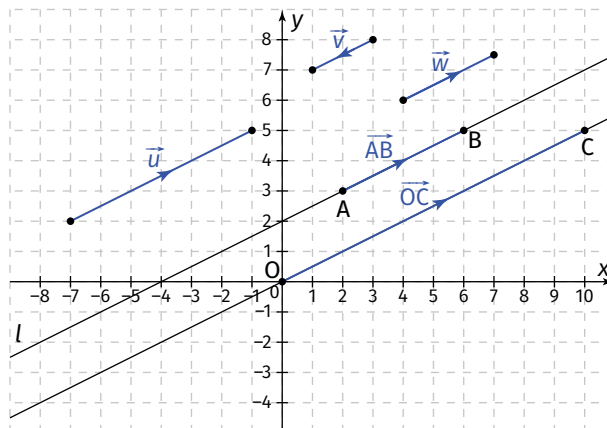
$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{l} \frac{x - 2}{4} = \frac{y - 3}{2} \\ x - 2 = 2(y - 3) \\ x - 2 = 2y - 6 \\ x + 4 = 2y \\ \frac{1}{2}x + 2 = y \end{array}$$



— Merk op —

- De nulvector is **geen** richtvector.
- De rechte AB (met richtvector $\vec{AB}$) is evenwijdig met de rechte OC (met richtvector $\vec{OC}$). We stellen vast dat $\vec{OC} = 2,5 \cdot \vec{AB}$. Evenwijdige rechten hebben richtvectoren die een veelvoud van elkaar zijn.
- Elke vector die twee verschillende punten op de rechte met elkaar verbindt, is een mogelijke richtvector. Alle richtvectoren van eenzelfde rechte zijn van nul verschillende reële veelvouden van elkaar. Ze hebben allemaal dezelfde richting. De vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zijn dus richtvectoren van de rechte l .
- Bij een rechte met algemene vergelijking $ux + vy + w = 0$ is (u, v) een normaalvector van de rechte.





Verwerkingsopdrachten



17

Geef een parametrische en vectoriële vergelijking van de rechte als ...

a) $O(0, 0)$ en $A(4, 2)$.

Vectoriële vergelijking: $\vec{P} = k \cdot \vec{A}$

Parametrische vergelijking: $(x, y) = k \cdot (4, 2)$

$$(x, y) = (4k, 2k)$$

b) $C(3, 5)$ en $D(-1, 3)$.

Vectoriële vergelijking: $\vec{P} = \vec{C} + k \cdot \vec{CD}$

Coördinaat van de vector $\vec{CD} = (-1 - 3, 3 - 5) = (-4, -2)$

Parametrische vergelijking: $(x, y) = (3, 5) + k \cdot (-4, -2)$

$$(x, y) = (3, 5) + (-4k, -2k)$$

$$(x, y) = (3 - 4k; 5 - 2k)$$

18

Leg het verband tussen de vectoriële, parametrische en cartesische vergelijking.

a) $a \leftrightarrow y = 4x - 2$

• Geef de vectoriële vergelijking.

We bepalen 2 punten op de rechte a : bv. $A(0, -2)$ en $B(\frac{1}{2}, 0)$

$$\vec{P} = \vec{A} + k \cdot \vec{AB}$$

• Geef de parametrische vergelijking.

De coördinaat van $\vec{AB}$ is $(\frac{1}{2}, 2)$

$$\vec{P} = \vec{A} + k \cdot \vec{AB}$$

$$= (0, -2) + k \cdot (\frac{1}{2}, 2)$$

$$= (0, -2) + (\frac{1}{2}k, 2k)$$

$$= (\frac{1}{2}k, 2k - 2)$$

b) $(x, y) = (-1 + 3k; 2 + k)$ is een parametrische vergelijking van b . Geef de cartesische vergelijking.

$$x = -1 + 3k \text{ en } y = 2 + k$$

$$k = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \text{ en } k = y - 2$$



$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = y - 2$$

$$x + 1 = 3y - 6$$

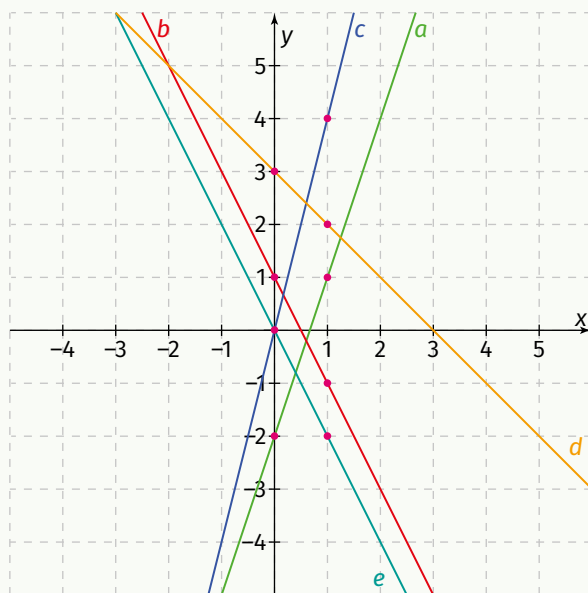
$$x - 3y + 7 = 0$$



Signaal oefeningen

1

Bepaal de vergelijking van de gegeven rechten.



$$a \leftrightarrow y = 3x - 2$$

$$b \leftrightarrow y = -2x + 1$$

$$c \leftrightarrow y = 4x$$

$$d \leftrightarrow y = -x + 3$$

$$e \leftrightarrow y = -2x$$

>>> Verder oefenen: D1 t.e.m. D8

2

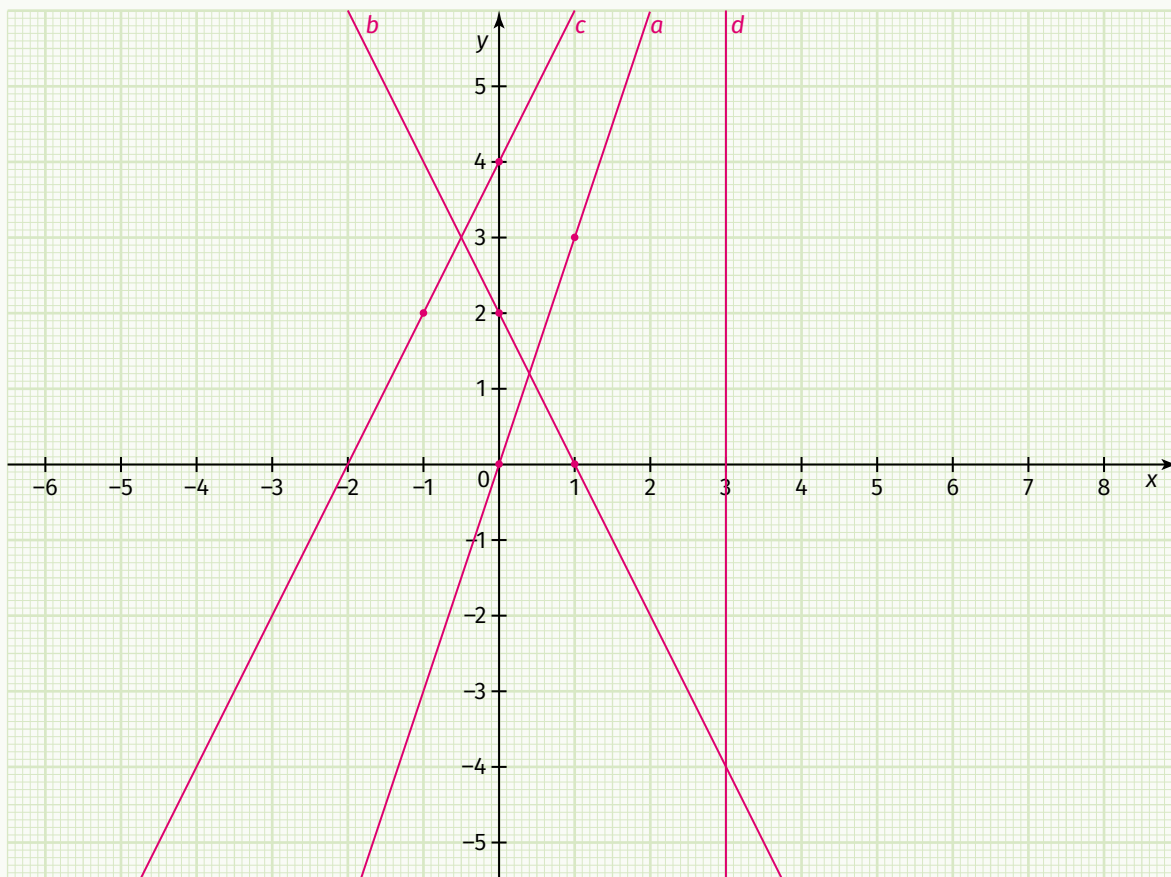
Teken de rechten a , b , c en d .

$$a \leftrightarrow y = 3x$$

$$b \leftrightarrow y = -2x + 2$$

$$c \leftrightarrow 4x - 2y + 8 = 0$$

$$d \leftrightarrow x - 3 = 0$$



>>> Verder oefenen: D9 t.e.m. D13

3

Zoek de vergelijking van de rechte waarvan de richtingscoëfficiënt en één punt gegeven zijn.

a) Rechte a heeft als richtingscoëfficiënt 2 en gaat door $P(3, -4)$.

$$\begin{aligned}y - y_P &= a(x - x_P) \\y - (-4) &= 2(x - 3) \\y + 4 &= 2x - 6 \\y &= 2x - 6 - 4 \\y &= 2x - 10\end{aligned}$$

b) Rechte b heeft als richtingscoëfficiënt -3 en gaat door $Q(0, -2)$.

$$\begin{aligned}y - y_Q &= a(x - x_Q) \\y - (-2) &= (-3)(x - 0) \\y + 2 &= -3x \\y &= -3x - 2\end{aligned}$$

>>> Verder oefenen: D14 t.e.m. D26

4

Bepaal telkens de vergelijking van de rechte XY .

a) $X(3, -2)$ en $Y(5, 3)$

$$\begin{aligned}y - y_X &= \frac{y_Y - y_X}{x_Y - x_X}(x - x_X) \\y - (-2) &= \frac{3 - (-2)}{5 - 3}(x - 3) \\y + 2 &= \frac{5}{2}x - \frac{15}{2} \\y &= \frac{5}{2}x - \frac{19}{2}\end{aligned}$$

b) $X(34, 12)$ en $Y(22, 5)$

$$\begin{aligned}y - y_X &= \frac{y_Y - y_X}{x_Y - x_X}(x - x_X) \\y - 12 &= \frac{5 - 12}{22 - 34}(x - 34) \\y - 12 &= \frac{7}{12}x - \frac{119}{6} \\y &= \frac{7}{12}x - \frac{47}{6}\end{aligned}$$

>>> Verder oefenen: D14 t.e.m. D26

5

Zet de gegeven vergelijking om naar de algemene vorm van een vergelijking van een rechte.

a) $y = -3x + 2$ $3x + y - 2 = 0$

b) $y = \frac{1}{2}x - 5$ $2y = x - 10$
 $x - 2y - 10 = 0$

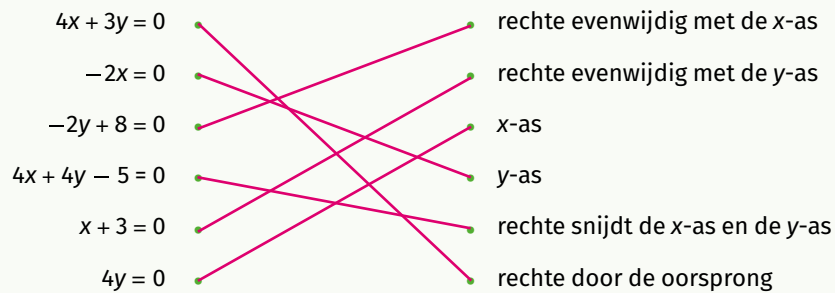
c) $y = \frac{3x + 3}{4}$ $4y = 3x + 3$
 $3x - 4y + 3 = 0$

d) $5x = -3$ $5x + 3 = 0$

>>> Verder oefenen: D27 t.e.m. D50

6

Verbind de vergelijkingen met de meest juiste omschrijving.



>>> Verder oefenen: D27 t.e.m. D50

7

Ligt $A(3, \frac{11}{4})$ op de rechte a met vergelijking $3x - 4y + 2 = 0$? Toon aan met een berekening.

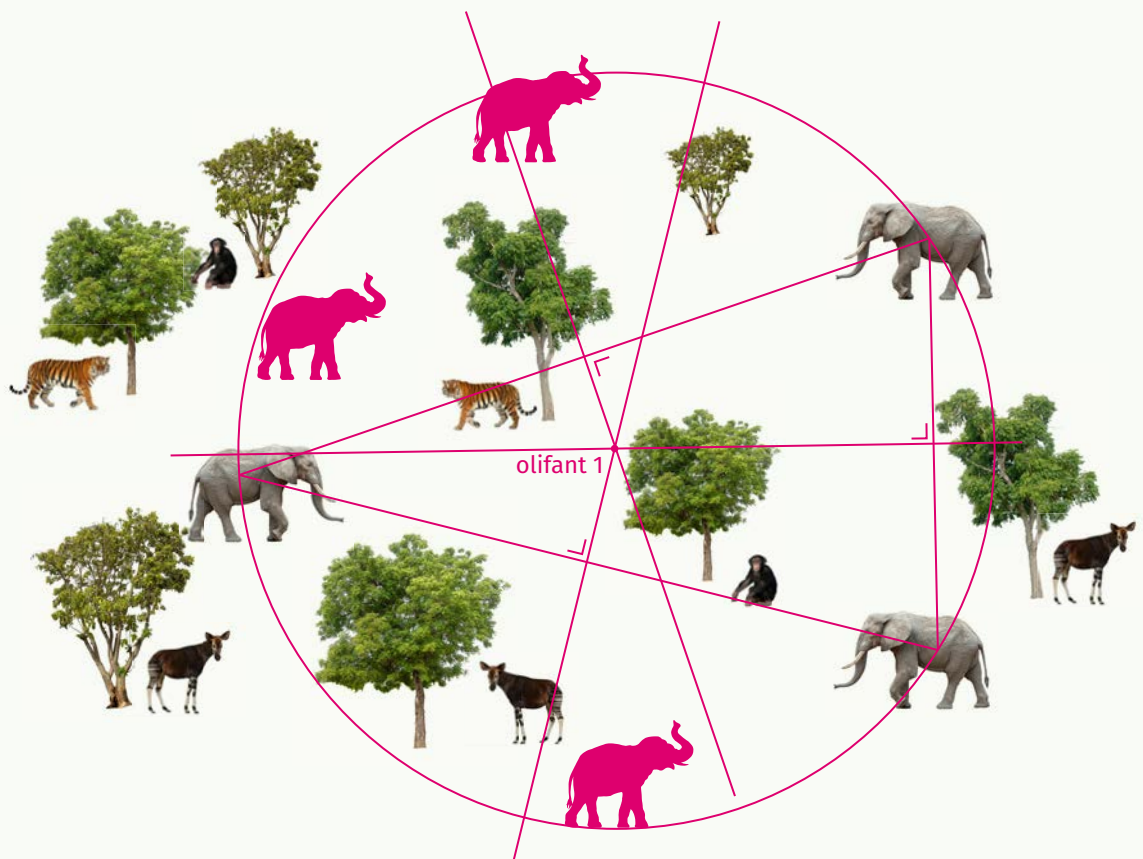
$$\begin{aligned}
 3 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{11}{4} + 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 9 - 11 + 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Antwoord: Het punt A ligt op de rechte a .

>>> Verder oefenen: D27 t.e.m. D50

8

- a) Olifanten maken een zeer laag geluid waardoor ze tot op 2,5 km afstand nog hoorbaar zijn. Bepaal de plaats van olifant 1 als je weet dat de andere 3 olifanten deze nog n t kunnen horen.
- b) Plaats nog 3 olifanten op de kaart die olifant 1 nog net kan horen.



>>> Verder oefenen: D51 t.e.m. D70

a) **Gegeven:** $(x, y) = (-5k + 2, 3k + 1)$ is een parametervergelijking van a

Gevraagd: • Bepaal de vergelijking van a .

• Licht $(3, 4)$ op de rechte a ?

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad x = -5k + 2 \quad \text{en} \quad y = 3k + 1 \\
 & \quad k = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \quad \text{en} \quad k = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \\
 & \quad \quad \quad \Downarrow \\
 & \quad \quad -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \\
 & \quad 15 \cdot \left(-\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right) \cdot 15 \\
 & \quad \quad -3x + 6 = 5y - 5 \\
 & \quad \quad -3x - 5y + 11 = 0 \\
 & \bullet \quad -3 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 11 = 0 \\
 & \quad \quad -9 - 20 + 11 = 0 \\
 & \quad \quad -18 \neq 0 \\
 & \quad (3, 4) \text{ ligt niet op de rechte } a.
 \end{aligned}$$

b) Geef de cartesische vergelijking van b als je weet dat $(x, y) = (4k + 1, -k + 3)$ een parametervergelijking is.

$$\begin{aligned}
 & x = 4k + 1 \quad \text{en} \quad y = -k + 3 \\
 & k = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \quad \text{en} \quad k = -y + 3 \\
 & \quad \quad \quad \Downarrow \\
 & \quad \quad \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} = -y + 3 \\
 & \quad 4 \cdot \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) = (-y + 3) \cdot 4 \\
 & \quad \quad x - 1 = -4y + 12 \\
 & \quad \quad 4y = -x + 13 \\
 & \quad \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \\
 & b \leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}
 \end{aligned}$$



Differentiatietraject

module p. 31

1

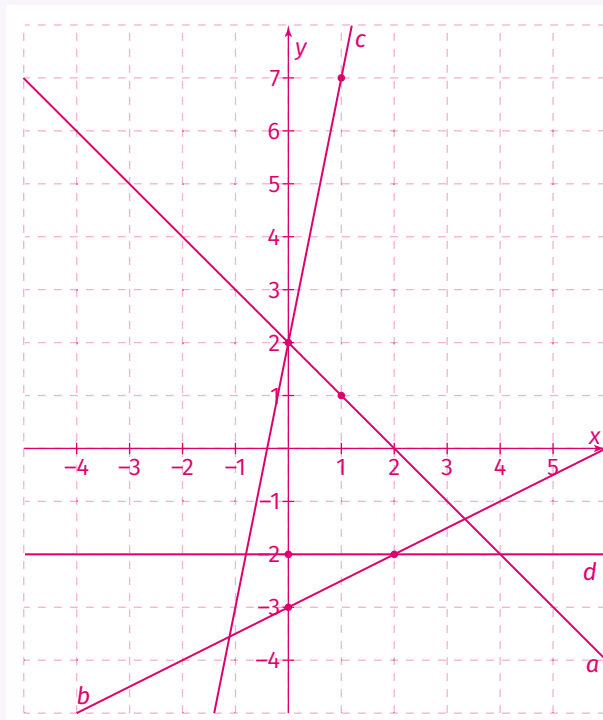
Teken de grafiek van de volgende rechten in een assenstelsel.

$$a \leftrightarrow y = -x + 2$$

$$b \leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 3$$

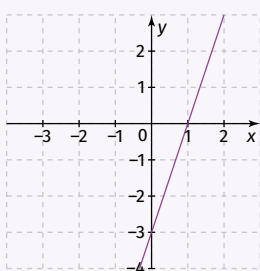
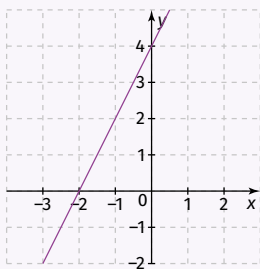
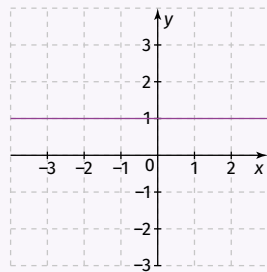
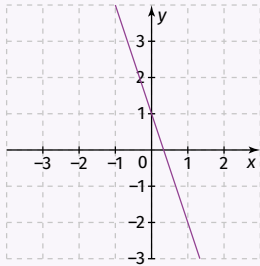
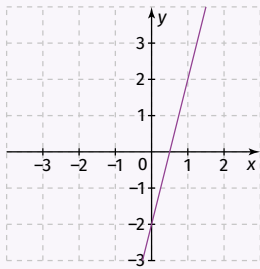
$$c \leftrightarrow y = 5x + 2$$

$$d \leftrightarrow y = -2$$



2

Verbind de vergelijkingen van de rechten met de juiste grafiek.



$y = 1$

$y = 3x - 3$

$y = 4x - 2$

$y = -3x + 1$

$y = 2x + 4$



3

Vul voor elke vergelijking de waardentabel aan.

a) $y = 2x$

x	-3	-1	0	1	2	2,5
y	-6	-2	0	2	4	5

c) $2y = 0$

x	-3	-1	0	1	2	5
y	0	0	0	0	0	0

b) $y = -3x + 4$

x	-3	$-\frac{1}{3}$	0	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$
y	13	5	4	-2	-3	-6

d) $3x = 1 - y$

x	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	3
y	5	1	0	-2	-4	-8



4

Teken de grafiek van de volgende rechten in een assenstelsel.

$a \leftrightarrow x + y + 3 = 0$

$b \leftrightarrow -3x + 2y - 6 = 0$

$c \leftrightarrow 2x + 3y - 1 = 0$

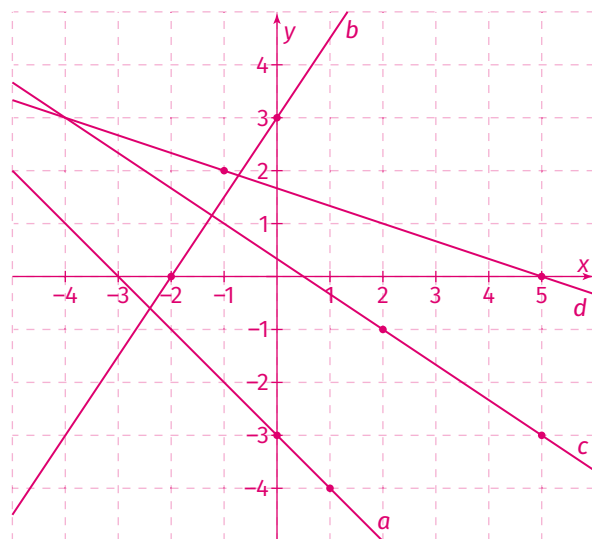
$d \leftrightarrow -x - 3y + 5 = 0$

$a \leftrightarrow y = -x - 3$

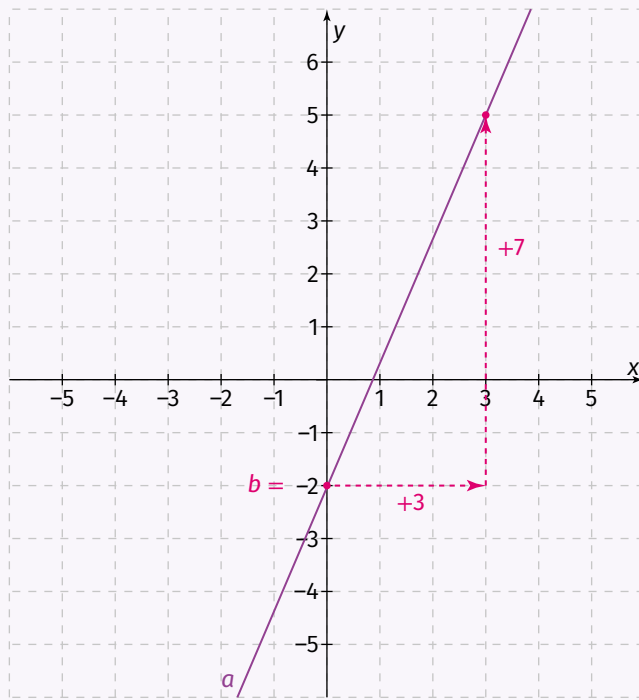
$b \leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$

$c \leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$d \leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$



5

Geef de vergelijking van de rechte a waarvan de grafiek gegeven is.De punten $(0, -2)$ en $(3, 5)$ liggen op de rechte a .

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - (-2) = \frac{5 - (-2)}{3 - 0} (x - 0)$$

$$y + 2 = \frac{7}{3} (x - 0)$$

$$y = \frac{7}{3}x - 2$$

ofwel: richtingscoëfficiënt a en het snijpunt met de y -as kan je aflezen op de tekening:

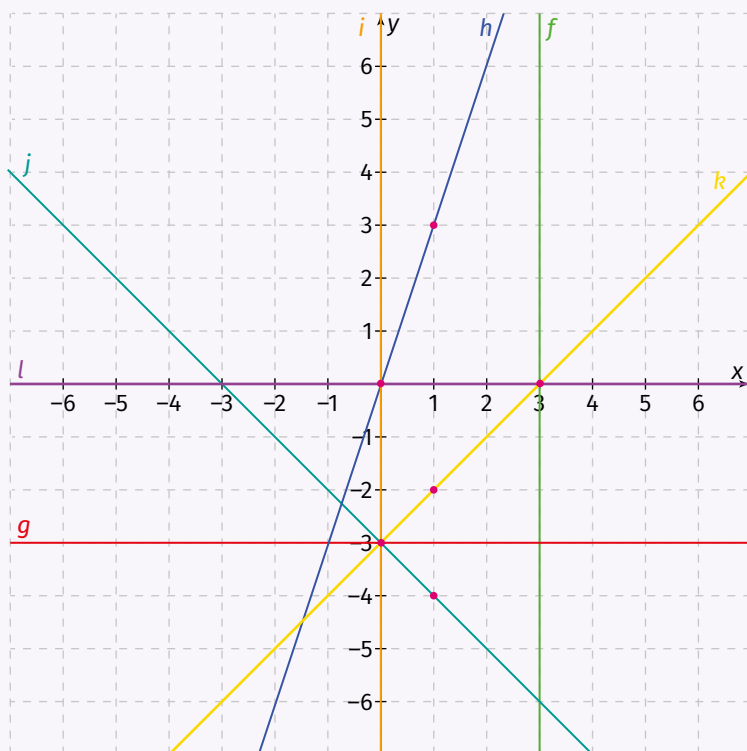
$$a = \frac{7}{3} \quad \text{en} \quad b = -2$$

$$a \leftrightarrow y = \frac{7}{3}x - 2$$



6

Stel van elke gegeven rechte de vergelijking op.



$$f \leftrightarrow x = 3$$

$$g \leftrightarrow y = -3$$

$$h \leftrightarrow y = 3x$$

$$i \leftrightarrow x = 0$$

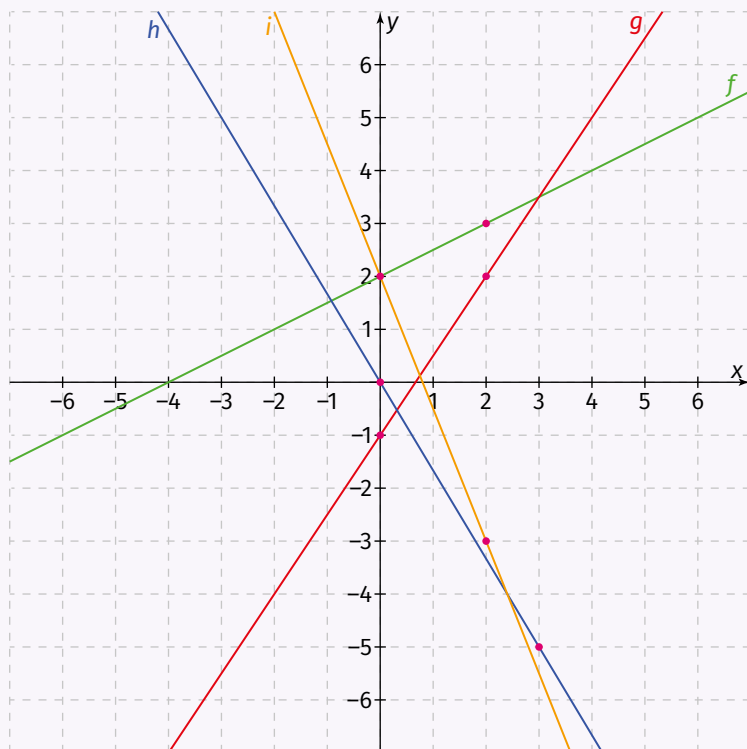
$$j \leftrightarrow y = -x - 3$$

$$k \leftrightarrow y = x - 3$$

$$l \leftrightarrow y = 0$$



7

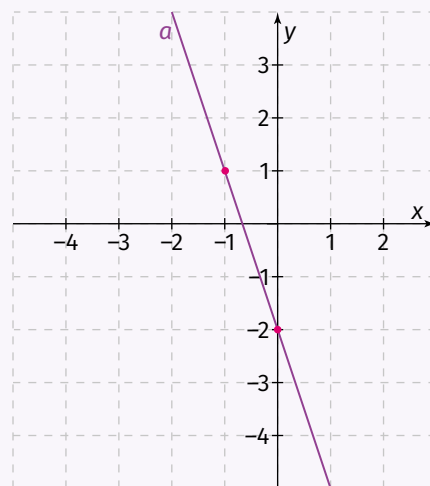
Stel de vergelijking op van de rechten f , g , h en i .

$$\begin{aligned} f &\leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2 \\ g &\leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 1 \\ h &\leftrightarrow y = -\frac{5}{3}x \\ i &\leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x + 2 \end{aligned}$$



8

- Bepaal de vergelijking van de getekende rechte a .
- Bepaal de vergelijking van de rechte b die je krijgt door de gegeven rechte a vier eenheden naar boven te verschuiven.
- Bepaal de vergelijking van de rechte c die je krijgt door de gegeven rechte a te spiegelen ten opzichte van de x -as.
- Bepaal de vergelijking van de rechte d die je krijgt door de gegeven rechte a te spiegelen ten opzichte van de y -as.
- Bepaal de vergelijking van de rechte e die je krijgt door de gegeven rechte a 1 eenheid naar onder te verschuiven.

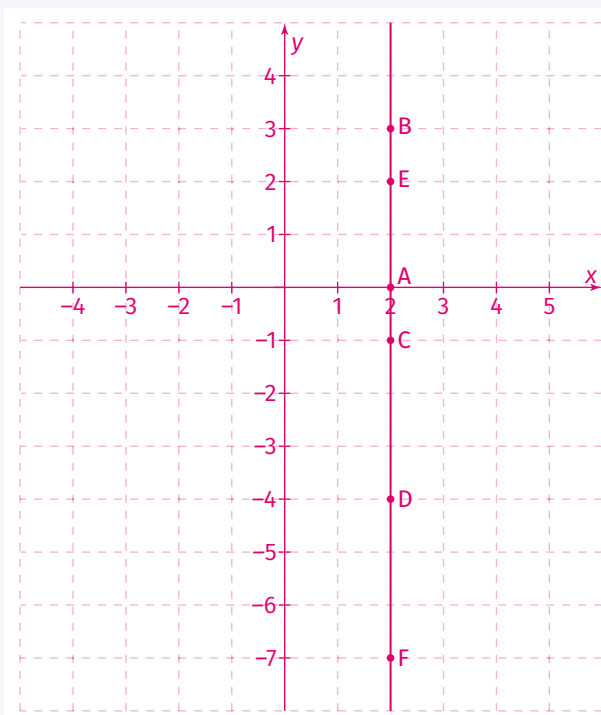


$$\begin{aligned} \text{a) } a &\leftrightarrow y = -3x - 2 \\ \text{b) } b &\leftrightarrow y = -3x + 2 \\ \text{c) } c &\leftrightarrow -y = -3x - 2 \Leftrightarrow c \leftrightarrow y = 3x + 2 \\ \text{d) } d &\leftrightarrow y = -3 \cdot (-x) - 2 \Leftrightarrow d \leftrightarrow y = 3x - 2 \\ \text{e) } e &\leftrightarrow y = -3x - 3 \end{aligned}$$



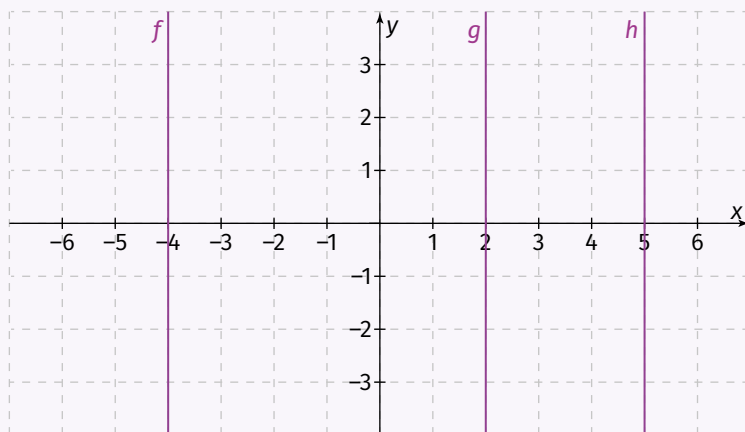
9

- Plaats de punten A(2, 0), B(2, 3), C(2, -1), D(2, -4) in een assenstelsel.
- Teken nog twee punten E en F waarvan het eerste coördinaatgetal 2 is.
- Teken de rechte waarop de punten met eerste coördinaatgetal $x = 2$ liggen.



10

Geef van elke rechte de vergelijking.



$$f \leftrightarrow x = -4$$

$$g \leftrightarrow x = 2$$

$$h \leftrightarrow x = 5$$

11

Vul voor elke vergelijking de waardentabel aan.

a) $x = 7$

x	7	7	7	7
y	-3	0	2	4

c) $3x = 6$

x	2	2	2	2
y	-5	-2	1	13

b) $x + 2 = 0$

x	-2	-2	-2	-2
y	-8	-1	3	7



12

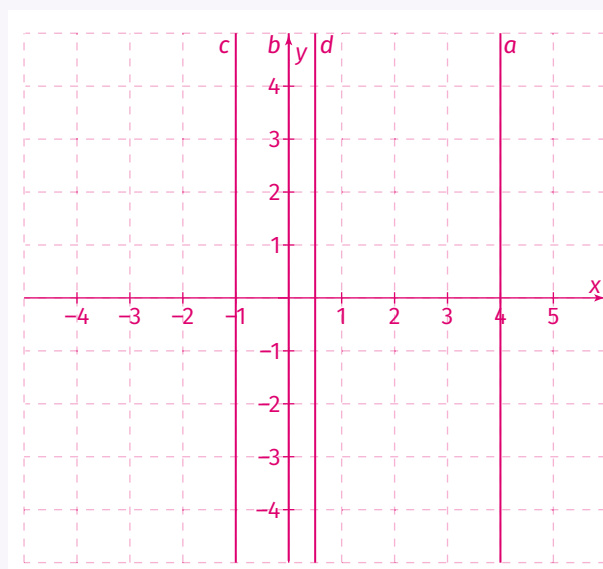
Teken de grafiek van de volgende rechten in een assenstelsel.

a) $x = 4$

b) $x = 0$

c) $x + 1 = 0$

d) $x = \frac{1}{2}$



13

a) Kleur alle rechten evenwijdig met de x-as groen.

b) Kleur alle rechten evenwijdig met de y-as geel.

c) Omkring alle rechten die door de oorsprong gaan.

$-3x = 5$	$-3x = 0$	$y = -1$	$2x + 3 = 0$
$4y = -3$	$2y = -4$	$5x = 2y$	$-3x + 5y = 1$
$4x = -4$	$x + y = 0$	$2x - y = 0$	$2x + 2y = 4$



14

Bepaal de richtingscoëfficiënt van de rechte die door A(2, 5) en B(4, -1) gaat.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 5}{4 - 2} = \frac{-6}{2} = -3$$

15

Geef de vergelijking van de rechte die door de oorsprong gaat en door het punt A(-2, 3).

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} (x - x_0) \\ y - 0 &= \frac{3 - 0}{-2 - 0} (x - 0) \\ y &= -\frac{3}{2}x \end{aligned}$$

16

Geef de vergelijking van de rechte die de gegeven richtingscoëfficiënt en het gegeven punt bevat.

- a) $a = -3$ en A(5, 4)
- b) $a = \frac{3}{2}$ en B(1, 2)
- c) $a = 6$ en C(-2, 1)

$$\begin{aligned} \text{a) } y - y_A &= a(x - x_A) \\ y - 4 &= (-3)(x - 5) \\ y - 4 &= -3x + 15 \\ y &= -3x + 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y - y_B &= a(x - x_B) \\ y - 2 &= \frac{3}{2}(x - 1) \\ y - 2 &= \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 2 \\ y &= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y - y_C &= a(x - x_C) \\ y - 1 &= 6(x - (-2)) \\ y - 1 &= 6(x + 2) \\ y - 1 &= 6x + 12 \\ y &= 6x + 13 \end{aligned}$$

17

Zoek de vergelijking van de rechte die door de volgende punten gaat.

- a) $X(2, -2)$ en $Y(-4, -3)$
- b) $P(-3, 5)$ en $Q(2, 5)$
- c) $A(3, 0)$ en $B(-2, 7)$

$$\begin{aligned} \text{a) } y - y_X &= \frac{y_Y - y_X}{x_Y - x_X} (x - x_X) \\ y - (-2) &= \frac{-3 - (-2)}{-4 - 2} (x - 2) \\ y + 2 &= \frac{1}{6}x - \frac{2}{6} \\ y &= \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} - 2 \\ y &= \frac{1}{6}x - \frac{7}{3} \\ XY \leftrightarrow y &= \frac{1}{6}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y - y_P &= \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} (x - x_P) \\ y - 5 &= \frac{5 - 5}{2 - (-3)} (x - (-3)) \\ y - 5 &= 0(x + 3) \\ y &= 5 \\ PQ \leftrightarrow y &= 5 \end{aligned}$$

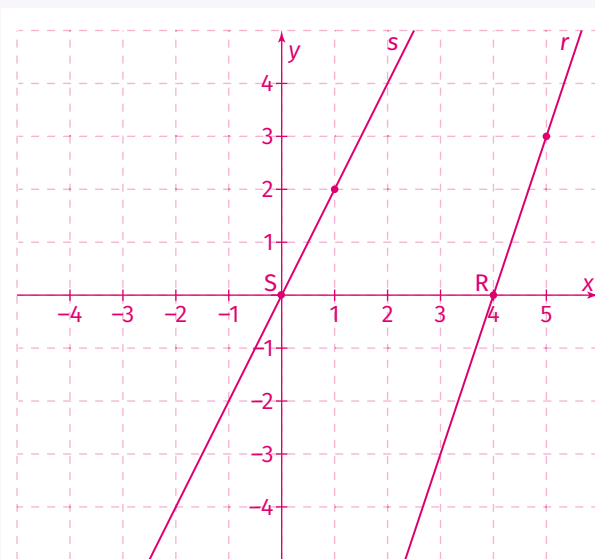
$$\begin{aligned} \text{c) } y - y_A &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) \\ y - 0 &= \frac{7 - 0}{-2 - 3} (x - 3) \\ y - 0 &= -\frac{7}{5} (x - 3) \\ y &= -\frac{7}{5}x + \frac{21}{5} \\ AB \leftrightarrow y &= -\frac{7}{5}x + \frac{21}{5} \end{aligned}$$



18

Teken ...

- a) de rechte s door het punt $S(0, 0)$ met $a = 2$.
- b) de rechte r door het punt $R(4, 0)$ met $a = 3$.



19

Onderzoek of de volgende punten collineair zijn.

A(1, 1), B(-1, -5) en C(2, 1)

- Stel de vergelijking van AB op.

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$

$$y - 1 = \frac{-5 - 1}{-1 - 1} (x - 1)$$

$$y - 1 = 3(x - 1)$$

$$y - 1 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 2$$

- Controleer of de coördinaat van C voldoet aan de vergelijking van AB.

$$1 \stackrel{?}{=} 3 \cdot 2 - 2$$

$$1 \stackrel{?}{=} 6 - 2$$

$$1 \neq 4$$

Antwoord: De punten A, B en C zijn niet collineair.



20

Noteer de coördinaat van ...

- een punt dat op de x-as ligt.
- een punt dat op de y-as ligt.
- een punt dat op de verticale rechte $x = 3$ ligt.
- een punt dat op de horizontale rechte $y = -2$ ligt.
- een punt dat op de y-as en boven de rechte $y = 3x$ ligt.
- een punt dat op de x-as en boven de rechte $y = 3x$ ligt.

a) $(k, 0)$ k is een willekeurig reëel getalb) $(0, k)$ k is een willekeurig reëel getalc) $(3, k)$ k is een willekeurig reëel getald) $(k, -2)$ k is een willekeurig reëel getale) $(0, k)$ $k > 0$ f) $(k, 0)$ $k < 0$ 

21

Bepaal de vergelijking van ...

- a) de rechte d die door het punt $E(2, 0)$ en het punt $F(-3, \frac{1}{3})$ gaat.
 b) de rechte g die door het punt $H(14, -11)$ en het punt $I(-13, -11)$ gaat.

$$\begin{aligned} \text{a) } y - y_E &= \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} (x - x_E) \\ y - 0 &= \frac{\frac{1}{3} - 0}{-3 - 2} (x - 2) \\ y &= -\frac{1}{15} (x - 2) \\ y &= -\frac{1}{15}x + \frac{2}{15} \\ \\ \text{b) } y - y_H &= \frac{y_I - y_H}{x_I - x_H} (x - x_H) \\ y - (-11) &= \frac{-11 - (-11)}{-13 - 14} (x - 14) \\ y + 11 &= 0 (x - 14) \\ y &= -11 \end{aligned}$$



22

Geef de vergelijking van ...

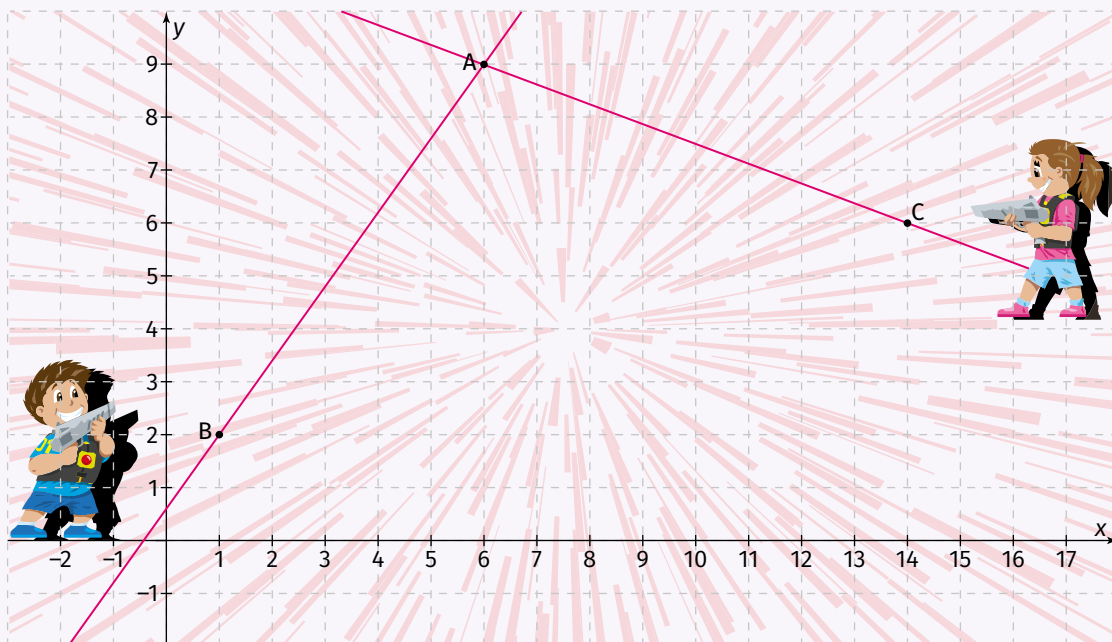
- a) de rechte p met $a = 0$ en door $A(7, 14)$.
 b) de rechte q die door $B(-4, 3)$ gaat en waarvan de richtingscoëfficiënt niet bestaat.
 c) de rechte r die door het punt $E(4, -3)$ en het punt $F(4, 6)$ gaat.

$$\begin{aligned} \text{a) } p &\leftrightarrow y = 14 \\ \text{b) } q &\leftrightarrow x = -4 \\ \text{c) } r &\leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$



23

Bij een lasershooting wil men vanuit de punten B en C het punt A raken.
Bepaal de vergelijking van de banen van de lasers.



De banen van de lasers zijn de rechten BA en CA.

A(6, 9) B(1, 2) C(14, 6)

Vergelijking van rechte BA:

$$y - 2 = \frac{9 - 2}{6 - 1} (x - 1)$$

$$y - 2 = \frac{7}{5} (x - 1)$$

$$y = \frac{7}{5}x - \frac{7}{5} + 2$$

$$y = \frac{7}{5}x + \frac{3}{5}$$

Vergelijking van rechte CA:

$$y - 6 = \frac{9 - 6}{6 - 14} (x - 14)$$

$$y - 6 = -\frac{3}{8} (x - 14)$$

$$y - 6 = -\frac{3}{8}x + \frac{21}{4}$$

$$y = -\frac{3}{8}x + \frac{21}{4} + 6$$

$$y = -\frac{3}{8}x + \frac{45}{4}$$

Antwoord: De vergelijkingen van de banen van de lasers zijn:

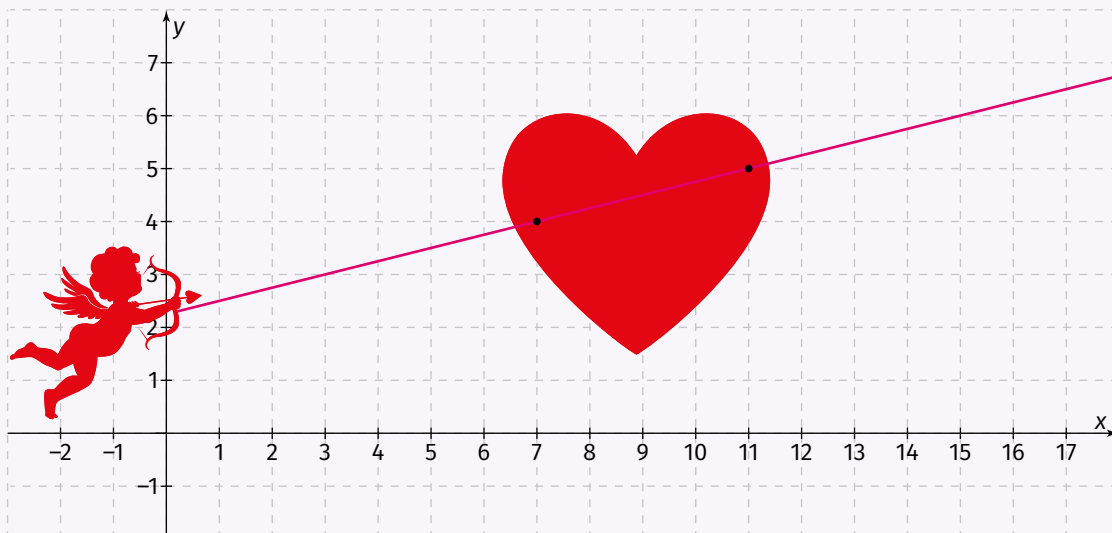
$$BA \leftrightarrow y = \frac{7}{5}x + \frac{3}{5}$$

$$CA \leftrightarrow y = -\frac{3}{8}x + \frac{45}{4}$$



24

- a) Bepaal de richtingscoëfficiënt van de rechte zodat Cupido raak schiet door de twee gegeven punten.
b) Stel de vergelijking op van de baan van de pijl.



- a) De baan van de pijl gaat door de punten (7, 4) en (11, 5).

$$a = \frac{5 - 4}{11 - 7} = \frac{1}{4}$$

- b) De vergelijking van de rechte is:

$$y - 4 = \frac{1}{4}(x - 7)$$

$$y - 4 = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4} + \frac{16}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$$



25

Onderzoek of $AB \parallel CD$.

$A(-2, 7)$, $B(3, -3)$, $C(-3, 1)$ en $D(0, -5)$

De richtingscoëfficiënt van de rechte AB is:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 7}{3 - (-2)} = \frac{-10}{5} = -2$$

De richtingscoëfficiënt van de rechte CD is:

$$\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-5 - 1}{0 - (-3)} = \frac{-6}{3} = -2$$

Beide rechten hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, dus $AB \parallel CD$.



26

De rechten a , b en c zijn gegeven. a gaat door $A(3, 1)$ en $B(-1, 4)$ b gaat door $B(-1, 4)$ en $C(3, 6)$ c gaat door de oorsprong en $c \parallel a$

- a) Bepaal de vergelijking van de rechten a , b en c .
- b) D ligt op de rechte b . Bepaal de coördinaat van $D(\dots, -3)$.
- c) Bepaal de coördinaat van het snijpunt E van de rechte a en de x -as.

a) • De vergelijking van de rechte a is:

$$y - 1 = \frac{4 - 1}{-1 - 3} (x - 3)$$

$$y - 1 = -\frac{3}{4} (x - 3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 1$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$$

• De vergelijking van de rechte b is:

$$y - 4 = \frac{6 - 4}{3 + 1} (x + 1)$$

$$y - 4 = \frac{1}{2} (x + 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

• De vergelijking van de rechte c is:

$$y = -\frac{3}{4}x$$

$$b) -3 = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{2}x = -\frac{15}{2}$$

$$x = -15$$

$$D(-15, -3)$$

$$c) 0 = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$$

$$3x = 13$$

$$x = \frac{13}{3}$$

$$E\left(\frac{13}{3}, 0\right)$$



27

a) Duid alle punten aan die op de rechte a liggen met vergelijking $3x - y + 6 = 0$.

$(-2, 0)$	$(2, 8)$	$(0, 0)$	$(-3, -3)$	$(-1, 3)$	$(0, 6)$
-----------	----------	----------	------------	-----------	----------

b) Geef nog een ander punt dat op de rechte a ligt.Bv. $(1, 9)$ 

28

De volgende vergelijkingen zijn van de vorm $ux + vy + w = 0$.Bepaal voor elke vergelijking de waarden van u , v en w .

a) $2x + 9y - 4 = 0$

c) $4x + 10 = 0$

b) $-x + 3y + 7 = 0$

d) $2y - 5x = 0$

	u	v	w
a)	2	9	-4
b)	-1	3	7
c)	4	0	10
d)	-5	2	0

29

Duid alle punten aan die op de rechte $x - y = 0$ liggen.

(0, 0)	(2, -2)	(-2, 2)	(-2, -2)	(4, 5)
--------	---------	---------	----------	--------

30

Op welke rechte liggen de volgende punten? Verbind elk punt met de rechte waarop het punt ligt.

(1, -3)

• $4x - y - 4 = 0$

(1, 2)

• $2x - 3y - 10 = 0$

(3, 1)

• $\frac{3}{2}x - y - 6 = 0$

(4, 0)

• $4x - y - 7 = 0$

(1, 4)

• $x = 3$

(1, 3)

• $y = 2$

31

Vul aan of schrap wat niet past.

a) Gegeven is de rechte met als vergelijking $y = 3x - \frac{1}{2}$.

De richtingscoëfficiënt van deze rechte is

Daaruit weten we dat dit een *dalende* / *stijgende* / *horizontale* / *verticale* rechte is.

De rechte snijdt de y-as in het punt

b) Gegeven is de rechte met als vergelijking $4x + 2y - 1 = 0$.

De richtingscoëfficiënt van deze rechte is

Daaruit weten we dat dit een *dalende* / *stijgende* / *horizontale* / *verticale* rechte is.

De rechte snijdt de y-as in het punt

a) De richtingscoëfficiënt van deze rechte is 3.

Daaruit weten we dat dit een ~~dalende~~ / *stijgende* / ~~horizontale~~ / ~~verticale~~ rechte is.

De rechte snijdt de y-as in het punt $(0, -\frac{1}{2})$.

b) De richtingscoëfficiënt van deze rechte is -2 .

Daaruit weten we dat dit een ~~dalende~~ / *stijgende* / ~~horizontale~~ / ~~verticale~~ rechte is.

De rechte snijdt de y-as in het punt $(0, \frac{1}{2})$.



32

Herleid de volgende vergelijkingen tot de vorm $ux + vy + w = 0$.

Werk ook de noemers weg.

a) $y = -2x + 5$

b) $y = \frac{4x - 6}{3}$

c) $2y = -3x$

d) $x = \frac{5}{3}$

e) $3y - 4 = -2x + 6$

f) $2x + 4 = -y + 4$

a) $2x + y - 5 = 0$

b) $4x - 3y - 6 = 0$

c) $3x + 2y = 0$

d) $3x - 5 = 0$

e) $2x + 3y - 10 = 0$

f) $2x + y = 0$



33

Vul de coördinaat aan zodat de punten op de gegeven rechte liggen.

a) $2x + y + 3 = 0$ $(\dots, 1)$ $(-1, \dots)$ $(1, \dots)$

b) $-x + 3y - 1 = 0$ $(-1, \dots)$ $(\dots, 2)$ $(-10, \dots)$

a) $(-2, 1)$ $(-1, -1)$ $(1, -5)$

b) $(-1, 0)$ $(5, 2)$ $(-10, -3)$



34

Beschouw de rechten a en b met als vergelijkingen

$a \leftrightarrow 3x - 5y + 1 = 0$

$b \leftrightarrow 6x - 10y + 2 = 0.$

Wat kan je besluiten over de onderlinge ligging van deze twee rechten?

De rechten a en b vallen samen.



35

Zoek de vergelijking van de rechte waarvan de richtingscoëfficiënt en één punt gegeven zijn. Noteer ze in de vorm $ux + vy + w = 0$.

a) $a = 3$ en $A(2, 0)$

b) $a = -4$ en $B(1, -2)$

a) $y - 0 = 3(x - 2)$

$y = 3x - 6$

$3x - y - 6 = 0$

b) $y + 2 = -4(x - 1)$

$y + 2 = -4x + 4$

$y = -4x + 2$

$4x + y - 2 = 0$



36

Gegeven: $d \leftrightarrow ux + vy + w = 0$

Schrap wat fout is.

 d is een rechte door de oorsprong $\Rightarrow w = 0 / \cancel{w \neq 0}$ d is een rechte evenwijdig met de x -as $\Rightarrow u = 0 / \cancel{u \neq 0}$ d is een rechte die de x -as en de y -as snijdt $\Rightarrow \cancel{u \neq 0 \vee v \neq 0} / u \neq 0 \wedge v \neq 0$ d is een rechte evenwijdig met de y -as $\Rightarrow v = 0 / \cancel{v \neq 0}$ 

37

Herleid de volgende vergelijkingen tot de vorm $ux + vy + w = 0$.

Werk ook de noemers weg.

a) $y = \frac{4}{3}x - 1$

b) $y = -\frac{3}{2}$

c) $2x - \frac{7}{2} = \frac{5}{3}y + 2$

d) $5(y - 3) = 2(4x - 1) + 3$

a) $3y = 4x - 3$
 $4x - 3y - 3 = 0$

b) $2y = -3$
 $2y + 3 = 0$

c) $12x - 21 = 10y + 12$
 $12x - 10y - 33 = 0$

d) $5y - 15 = 8x - 2 + 3$
 $8x - 5y + 16 = 0$



38

Vul de tabel aan.

VERGELIJKING	a	STIJGEND/DALEND/VERTICAAL/HORIZONTAAL	SNIJPUNT MET DE Y-AS
$x + y + 3 = 0$	-1	dalend	$(0, -3)$
$y + 1 = 0$	0	horizontaal	$(0, -1)$
$x - 3y + 2 = 0$	$\frac{1}{3}$	stijgend	$(0, \frac{2}{3})$
$x - 4 = 0$	bestaat niet	verticaal	geen
$-4x + y = 0$	4	stijgend	$(0, 0)$



39

Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn van $[XY]$ als je de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn gegeven krijgt.

- a) $X(5, 3)$ $Y(1, 5)$ en de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is 2.
b) $X(-4, -1)$ $Y(-6, 3)$ en de richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn is $\frac{1}{2}$.

a) De middelloodlijn van $[XY]$ bevat het midden van $[XY]$: $M(3, 4)$

De vergelijking van de middelloodlijn is:

$$y - 4 = 2(x - 3)$$

$$y - 4 = 2x - 6$$

$$y = 2x - 2$$

b) De middelloodlijn van $[XY]$ bevat het midden van $[XY]$: $M(-5, 1)$

De vergelijking van de middelloodlijn is:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - (-5))$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$



40

Bereken de waarde van de parameter p als je weet dat het punt $A(4, p)$ tot de rechte a behoort.

$$a \leftrightarrow 3x + 5y - 7 = 0$$

$$3 \cdot 4 + 5p - 7 = 0$$

$$12 + 5p - 7 = 0$$

$$5p + 5 = 0$$

$$p = -1$$



41

Stel de vergelijking op van de rechte p die evenwijdig is met q en door het punt A gaat.

a) $q \leftrightarrow 4x + y + 1 = 0$ en $A(2, -2)$

b) $q \leftrightarrow 2y - 3 = 0$ en $A(3, -2)$

c) $q \leftrightarrow x + y - 2 = 0$ en $A(5, 1)$



TIP Evenwijdige rechten hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.

$$a) \ a = \frac{-u}{v} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$y = -4x + q$$

$$-2 = -4 \cdot 2 + q$$

$$-2 + 8 = q$$

$$6 = q$$

$$p \leftrightarrow y = -4x + 6$$

$$b) \ a = \frac{-u}{v} = \frac{0}{2} = 0$$

$$p \leftrightarrow y = -2$$

$$c) \ a = \frac{-u}{v} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$y = -x + q$$

$$1 = -5 + q$$

$$6 = q$$

$$p \leftrightarrow y = -x + 6$$



42

Kleur de evenwijdige rechten in eenzelfde kleur.

$y = 3x - 4$	$3x + 6y - 5 = 0$	$-3x + y + 5 = 0$
$y = -0,5x - 1$	$3x - 2y + 1 = 0$	$3x - y - 2 = 0$
$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{5}$	$-x + 2y - 3 = 0$	$y = \frac{3-x}{2}$



43

Bereken de waarde van de parameter p als je weet dat het punt $A(-2, 5)$ tot de rechte a behoort.

$$a \leftrightarrow -3x + (p - 2)y + 10 = 0$$

$$-3 \cdot (-2) + (p - 2) \cdot 5 + 10 = 0$$

$$6 + 5(p - 2) + 10 = 0$$

$$5(p - 2) = -16$$

$$p - 2 = \frac{-16}{5}$$

$$p = \frac{-16}{5} + 2$$

$$p = \frac{-6}{5}$$



44

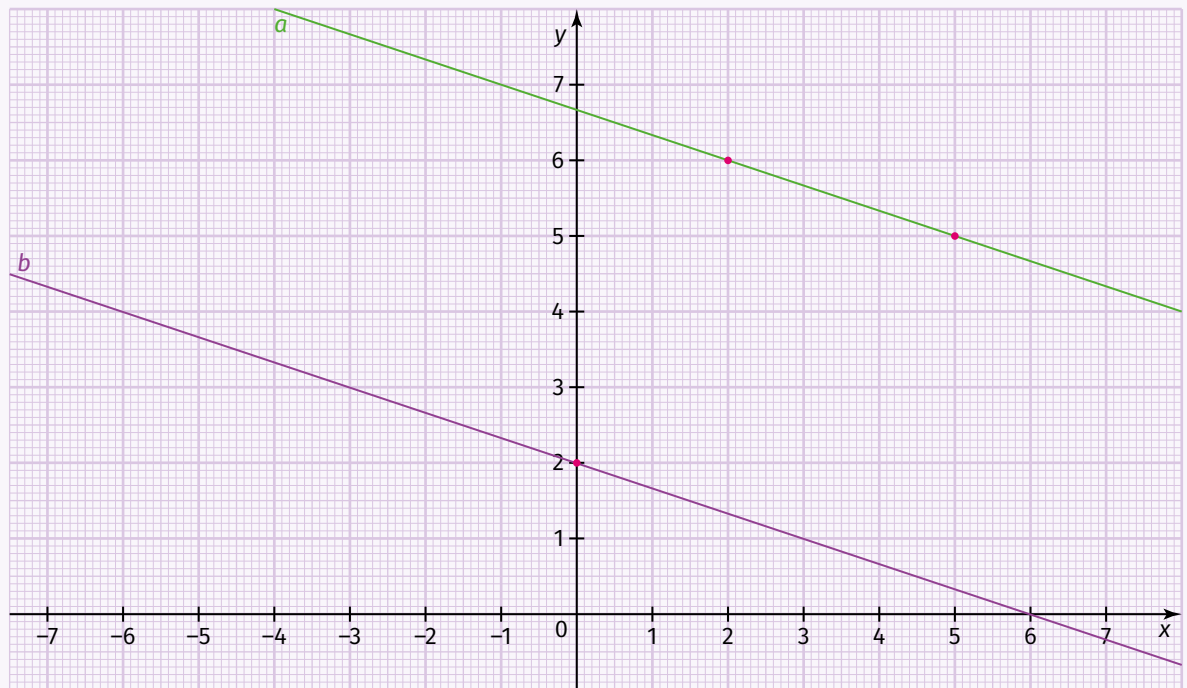
Vul de tabel aan.

VERGELIJKING	a	STIJGEND/DALEND/VERTICAAL/HORIZONTAAL	SNIJPUNT MET DE Y-AS
$3x - 8y + 6 = 0$	$\frac{3}{8}$	stijgend	$(0, \frac{3}{4})$
$-x + 3y = 8 - 2y$	$\frac{1}{5}$	stijgend	$(0, \frac{8}{5})$
$7x + 21 = 0$	bestaat niet	verticaal	geen
$-9x + 5y - 12 = 0$	$\frac{9}{5}$	stijgend	$(0, \frac{12}{5})$



45

Gegeven: De rechten a en b zijn evenwijdig.



- Noteer de vergelijking van de rechte a . Schrijf de vergelijking in de vorm $ux + vy + w = 0$.
- Zoek de coördinaat van het snijpunt A van de rechte a en de x -as.
- Zoek de coördinaat van het snijpunt B van de rechte b en de y -as.
- Bepaal de vergelijking van de rechte c door de oorsprong en evenwijdig met de rechte a .
- Bepaal de vergelijking van de rechte AB .

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad y - 6 &= \frac{5-6}{5-2}(x-2) \\
 y - 6 &= -\frac{1}{3}(x-2) \\
 y &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 6 \\
 3y &= -x + 20 \\
 x + 3y - 20 &= 0 \\
 \text{b)} \quad x + 0 - 20 &= 0 \\
 x &= 20 \\
 A(20, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad B(0, 2) \\
 \text{d)} \quad c \leftrightarrow y &= -\frac{1}{3}x \\
 \text{e)} \quad y - 0 &= \frac{2-0}{0-20}(x-20) \\
 y &= -\frac{1}{10}(x-20) \\
 y &= -\frac{1}{10}x + 2
 \end{aligned}$$



46

Bepaal, indien mogelijk, de coördinaten van de snijpunten van a met de coördinaatassen.

$$a \leftrightarrow -4x + 3y - 8 = 0$$

- Noem het snijpunt van a met de x -as het punt A.
- Noem het snijpunt van a met de y -as het punt B.

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ punt A:} \quad y &= 0 & -4x - 8 &= 0 & A(-2, 0) \\
 x &= -2 \\
 \bullet \text{ punt B:} \quad x &= 0 & 3y - 8 &= 0 & B\left(0, \frac{8}{3}\right) \\
 y &= \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$



47

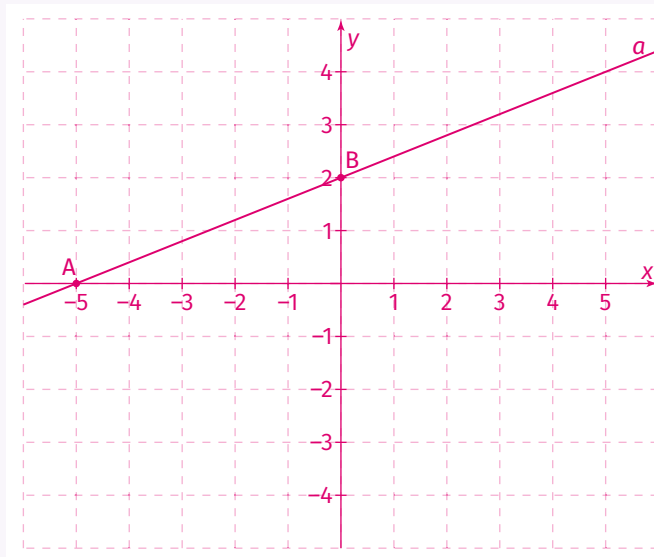
Teken de rechte a in een assenstelsel.

$$a \leftrightarrow 2x - 5y + 10 = 0$$

Werk als volgt:

Bepaal eerst de coördinaten van de snijpunten van a met de coördinaatassen.

- Noem het snijpunt van a met de x -as het punt A.
- Noem het snijpunt van a met de y -as het punt B.
- Verbind de punten A en B.



- punt A: $y = 0$

$$2x + 10 = 0$$

$$2x = -10$$

$$x = -5$$

$$A(-5, 0)$$

- punt B: $x = 0$

$$-5y + 10 = 0$$

$$-5y = -10$$

$$y = 2$$

$$B(0, 2)$$



48

Bepaal de richtingscoëfficiënt van de rechten b en d .

a) Als $a \perp b$ en $a \leftrightarrow -4x + y + 1 = 0$.

b) Als $c \perp d$ en $c \leftrightarrow \frac{1}{2}x + y - 3 = 0$.

a) richtingscoëfficiënt van rechte a is $4 \Rightarrow$ richtingscoëfficiënt van rechte b is $-\frac{1}{4}$

b) richtingscoëfficiënt van rechte c is $\frac{-1}{2} \Rightarrow$ richtingscoëfficiënt van rechte d is 2



49

Bereken de waarde van r als je weet dat het punt $P(-r, 3r)$ op de rechte $a \leftrightarrow 4x + 2y - 10 = 0$ ligt.

$$\begin{aligned}
 4 \cdot (-r) + 2 \cdot 3r - 10 &= 0 \\
 -4r + 6r - 10 &= 0 \\
 2r &= 10 \\
 r &= 5
 \end{aligned}$$



module p. 43

50

Beschouw de rechte a met vergelijking $a \leftrightarrow 4px - 2y + p + 1 = 0$ (parameter $p \in \mathbb{R}$).

- Bepaal p zodat het punt $A(2, 6)$ tot de rechte a behoort.
- Bepaal p zodat de rechte a evenwijdig is met $b \leftrightarrow y + 5 - 3x = 0$.
- Bepaal p (indien mogelijk) zodat de rechte a evenwijdig is met de x -as.
Geef de vergelijking van de rechte a in deze situatie.
- Bepaal p (indien mogelijk) zodat de rechte a evenwijdig is met de y -as.
Geef de vergelijking van de rechte a in deze situatie.
- Bepaal p (indien mogelijk) zodat de rechte a door de oorsprong gaat.
- Bepaal p (indien mogelijk) zodat de rechte a de y -as in hetzelfde punt snijdt als de rechte $c \leftrightarrow 2x + 5y - 4 = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 4p \cdot 2 - 2 \cdot 6 + p + 1 &= 0 \\
 8p - 12 + p + 1 &= 0 \\
 9p &= 11 \\
 p &= \frac{11}{9}
 \end{aligned}$$

b) De richtingscoëfficiënt van b :

$$a = \frac{-u}{v} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

De richtingscoëfficiënt van a :

$$a = \frac{-u}{v} = \frac{-4p}{-2} = 2p$$

Evenwijdige rechten hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.

$$\begin{aligned}
 2p &= 3 \\
 p &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l}
 \text{c) } 2p = 0 & 4 \cdot 0 \cdot x - 2y + 0 + 1 = 0 \\
 p = 0 & 1 = 2y \\
 & \frac{1}{2} = y \\
 & a \leftrightarrow y = \frac{1}{2}
 \end{array}$$

d) onmogelijk

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \bullet \quad b &= \frac{-w}{v} = \frac{-(p+1)}{-2} = \frac{p+1}{2} \\
 \bullet \quad \frac{p+1}{2} &= 0 \\
 p+1 &= 0 \\
 p &= -1
 \end{aligned}$$

f) De rechte c snijdt de y -as in het punt $(0, b)$.

$$b = \frac{-w}{v} = \frac{-(-4)}{5} = \frac{4}{5}$$

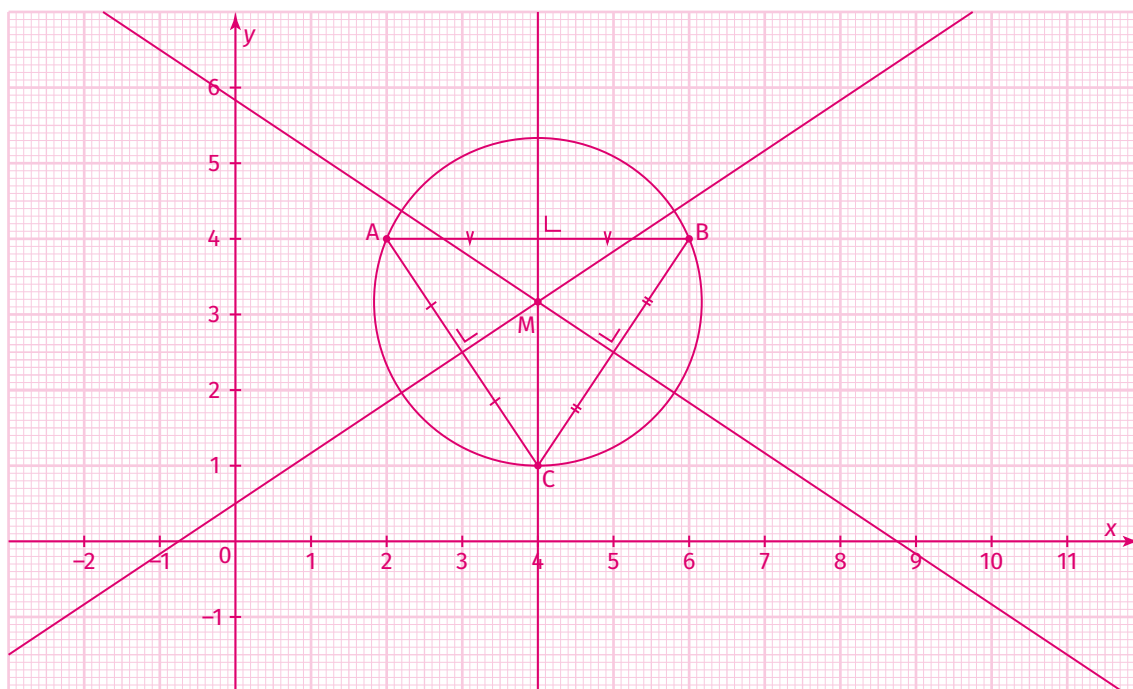
dus:

$$\begin{aligned}
 \frac{p+1}{2} &= \frac{4}{5} \\
 5(p+1) &= 8 \\
 5p+5 &= 8 \\
 5p &= 3 \\
 p &= \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$



51

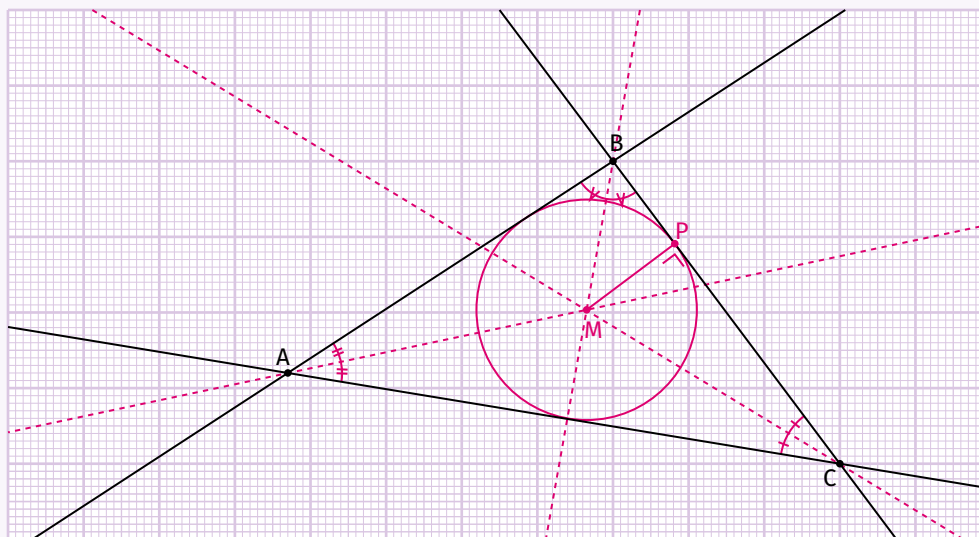
Construeer een cirkel door de punten $A(2, 4)$; $B(6, 4)$ en $C(4, 1)$.



- Teken de drie punten.
- Teken de drie lijnstukken $[AB]$, $[BC]$ en $[AC]$.
- Construeer de middelloodlijnen op de drie lijnstukken $[AB]$, $[BC]$ en $[AC]$.
- Deze drie middelloodlijnen snijden elkaar in één punt M .
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MA|$, dit is de gevraagde omgeschreven cirkel.

52

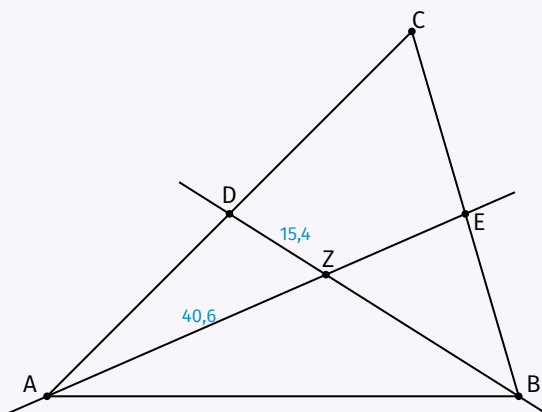
Construeer een cirkel die de drie gegeven rechten raakt.



- Teken de bissectrice in elke hoek van de $\triangle ABC$.
- M is het snijpunt van de bissectrices.
- Teken uit M de loodlijn op de zijde $[BC]$.
- P is het snijpunt van deze loodlijn met de zijde.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MP|$, deze cirkel is de gevraagde ingeschreven cirkel.

53

Gegeven: $\triangle ABC$ met zwaartelijnen AE , BD en zwaartepunt Z . $|AZ| = 40,6$ en $|DZ| = 15,4$.



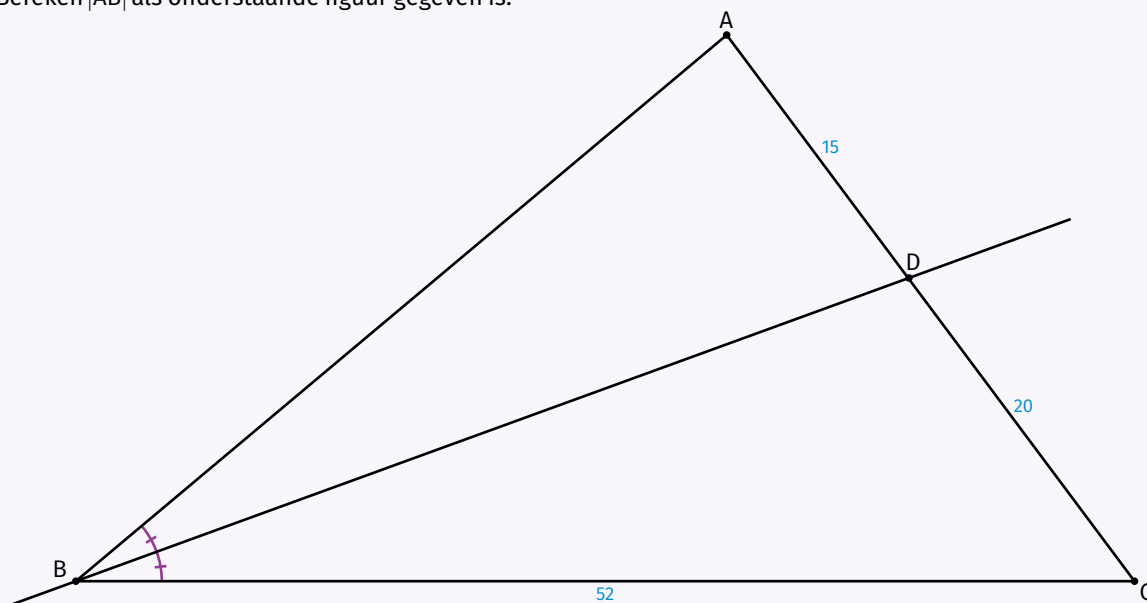
- a) Bereken $|ZE|$.
b) Bereken $|ZB|$.

$$\begin{aligned} \frac{|AZ|}{|ZE|} &= \frac{|BZ|}{|DZ|} = \frac{2}{1} \\ \Leftrightarrow \frac{40,6}{|ZE|} &= \frac{|BZ|}{15,4} = \frac{2}{1} \\ \Leftrightarrow \text{a) } \frac{40,6}{|ZE|} &= \frac{2}{1} \quad \text{en b) } \frac{|BZ|}{15,4} = \frac{2}{1} \\ \Leftrightarrow \frac{40,6}{2} &= |ZE| \quad \text{en} \quad |BZ| = 2 \cdot 15,4 \\ \Leftrightarrow 20,3 &= |ZE| \quad \text{en} \quad |BZ| = 30,8 \end{aligned}$$



54

Bereken $|AB|$ als onderstaande figuur gegeven is.

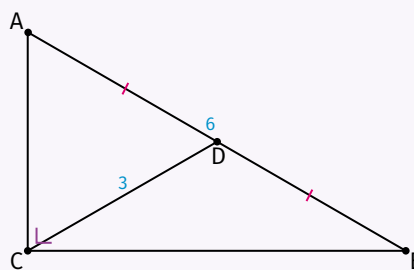
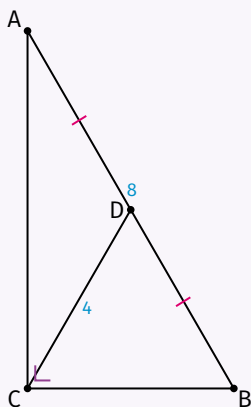
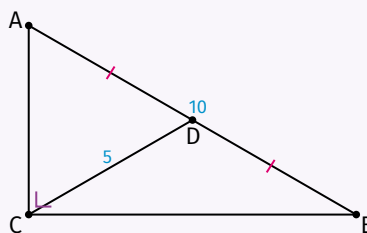
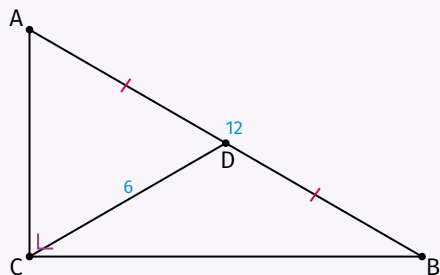


$$\begin{aligned} \frac{|CD|}{|AD|} &= \frac{|BC|}{|AB|} \\ \Leftrightarrow \frac{20}{15} &= \frac{52}{|AB|} \\ \Leftrightarrow |AB| \cdot 4 &= 52 \cdot 3 \\ \Leftrightarrow |AB| &= \frac{52 \cdot 3}{4} \\ \Leftrightarrow |AB| &= 39 \end{aligned}$$



55

Hieronder staan vier rechthoekige driehoeken waarvan telkens de zwaartelijnen op de schuine zijden getekend zijn. De lengtes van de zwaartelijnen en de schuine zijden zijn gegeven.



- a) Welk verband kan je vaststellen tussen $|CD|$ en $|AB|$?
 b) Formuleer deze eigenschap in woorden.

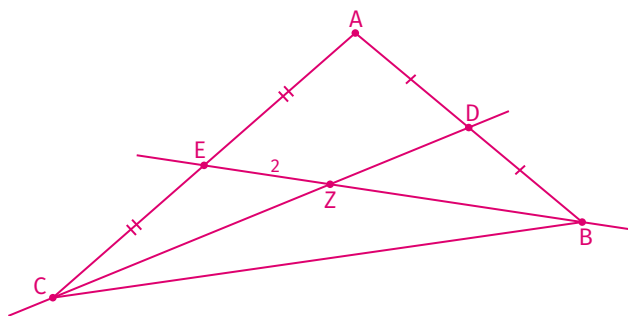
a) $|CD| = \frac{1}{2} |AB|$

- b) In een rechthoekige driehoek verhouden de lengte van de zwaartelijn op de schuine zijde en de lengte van de schuine zijde zich als 1 en 2.



56

In $\triangle ABC$ zijn de zwaartelijnen CD en BE getekend. Ze snijden elkaar in het punt Z . Bereken $|BZ|$, $|CZ|$ en $|DZ|$ als je weet dat $|EZ| = 2$ en $|CD| = 6$.



$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{|BZ|}{|EZ|} &= \frac{2}{1} \\ \frac{|BZ|}{2} &= 2 \\ |BZ| &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad |DZ| &= \frac{1}{3} |CD| \\ |DZ| &= \frac{1}{3} \cdot 6 \\ |DZ| &= 2 \end{aligned}$$

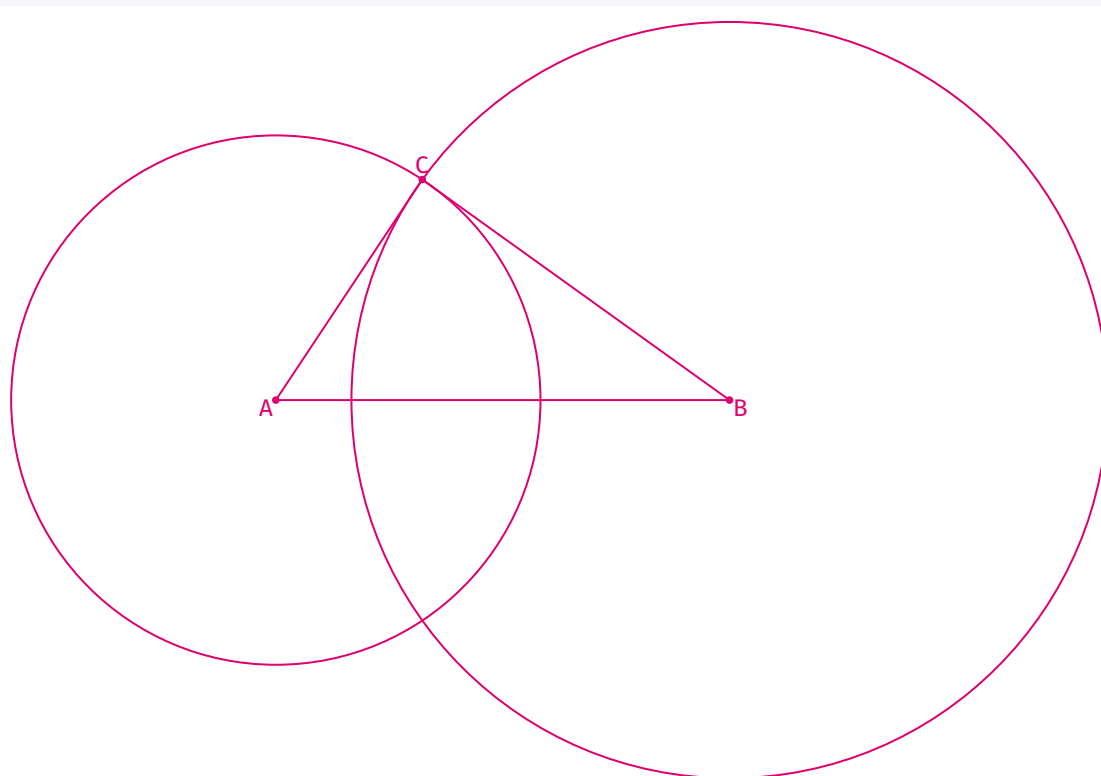
$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{|CZ|}{|DZ|} &= \frac{2}{1} \\ \frac{|CZ|}{2} &= \frac{2}{1} \\ |CZ| &= 4 \end{aligned}$$





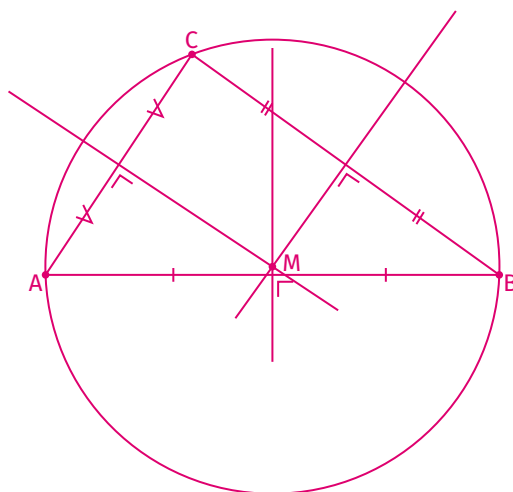
Gegeven: driehoek ABC met $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 10$ cm en $|CA| = 7$ cm.

Gevraagd: Construeer de ingeschreven en omgeschreven cirkel van deze driehoek. Maak gebruik van ICT.



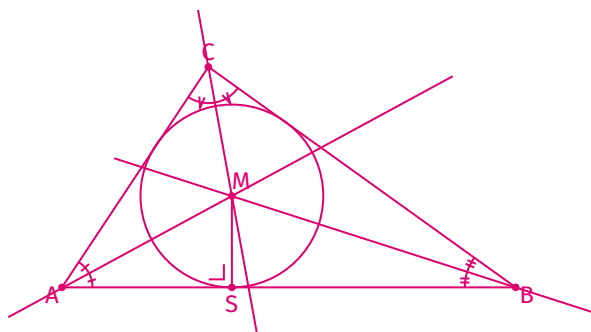
Constructie driehoek ABC:

- Teken een lijnstuk $[AB]$ van 12 cm.
- Teken een cirkel met middelpunt A en straal 7 cm.
- Teken een cirkel met middelpunt B en straal 10 cm.
- Het snijpunt van deze twee cirkels is het punt C.
- Teken de lijnstukken $[AC]$ en $[BC]$.



Constructie omgeschreven cirkel:

- Construeer de middelloodlijnen op de drie lijnstukken $[AB]$, $[BC]$ en $[AC]$.
- Deze drie middelloodlijnen snijden elkaar in één punt M.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MA|$, deze cirkel is de gevraagde omgeschreven cirkel.



Constructie ingeschreven cirkel:

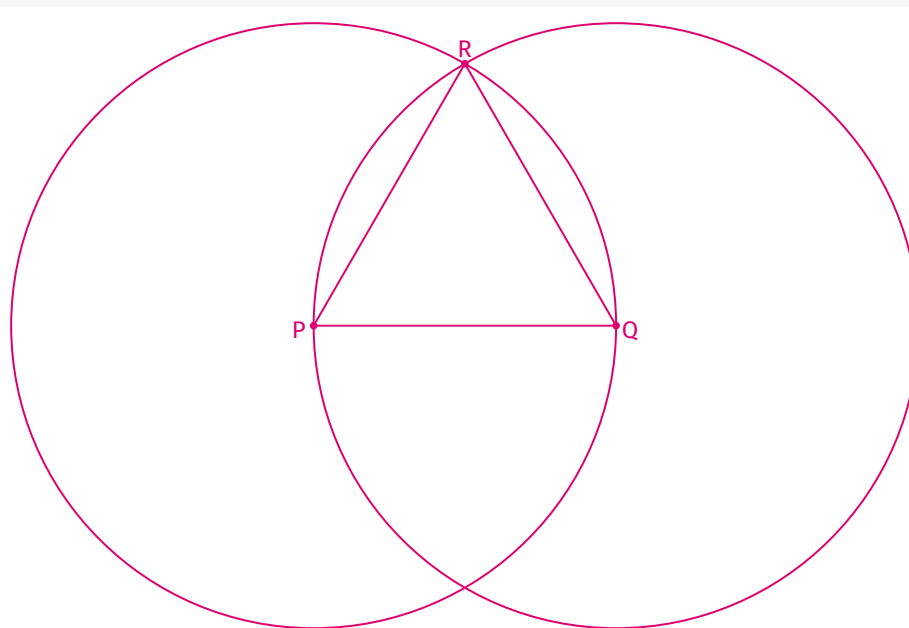
- Teken de bissectrice in elke hoek van de driehoek ABC.
- M is het snijpunt van de bissectrices.
- Teken uit M de loodlijn op de zijde [BA].
- S is het snijpunt van deze loodlijn met de zijde.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MS|$, deze cirkel is de gevraagde ingeschreven cirkel.



58

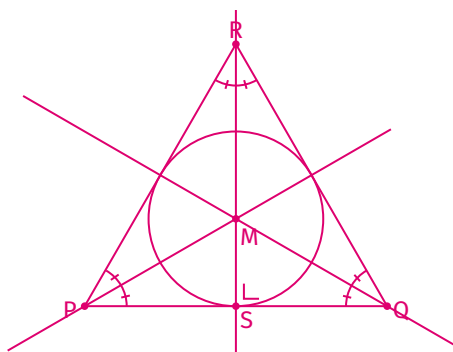
Teken een gelijkzijdige driehoek PQR met zijde 8 cm.

Construeer de ingeschreven cirkel in driehoek PQR. Maak gebruik van ICT.



Constructie driehoek PQR:

- Teken een lijnstuk [PQ] van 8 cm.
- Teken een cirkel met middelpunt P en straal 8 cm.
- Teken een cirkel met middelpunt Q en straal 8 cm.
- Het snijpunt van deze twee cirkels is het punt R.
- Teken de lijnstukken [PR] en [QR].



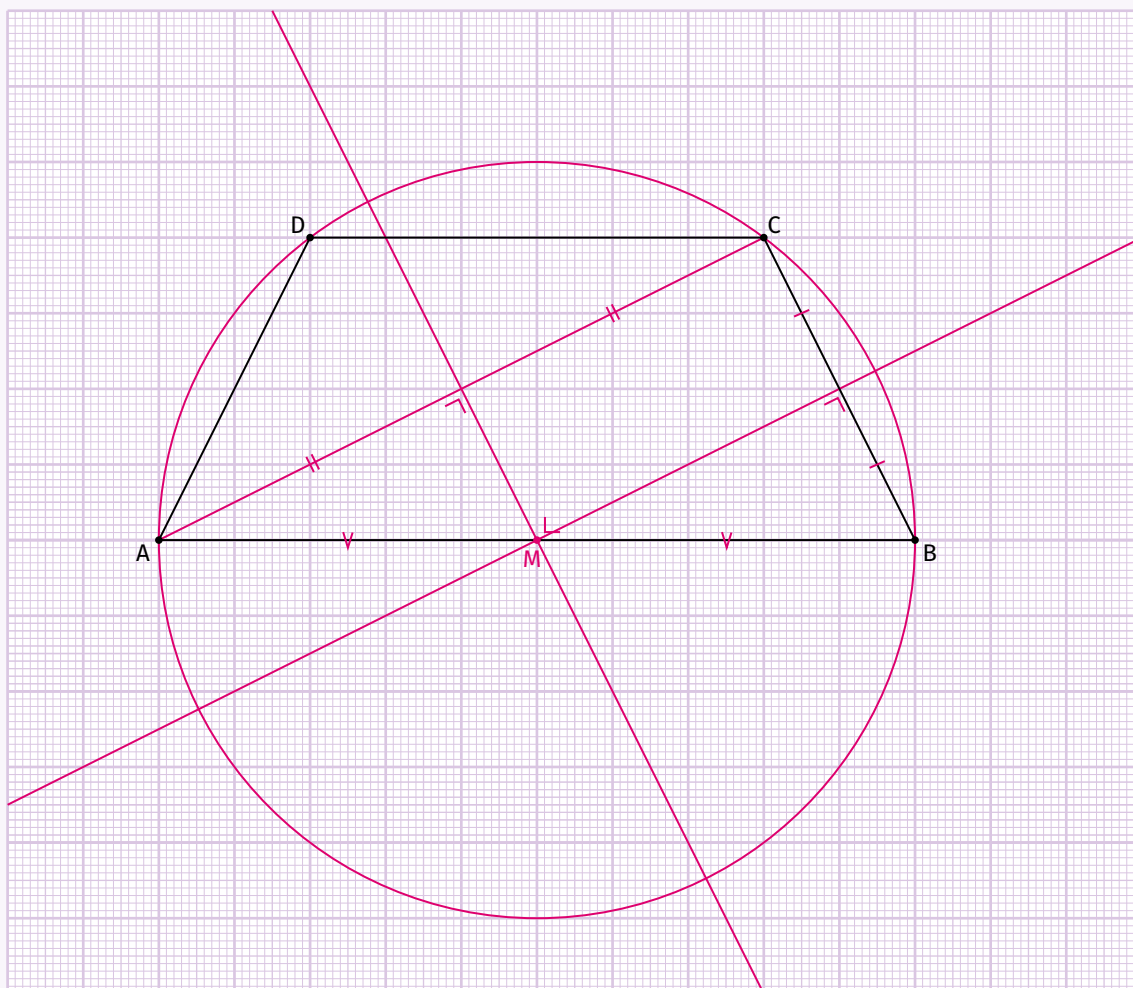
Constructie ingeschreven cirkel:

- Teken de bissectrice in elke hoek van de driehoek PQR.
- M is het snijpunt van de bissectrices.
- Teken uit M de loodlijn op de zijde [PR].
- S is het snijpunt van deze loodlijn met de zijde.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MS|$, deze cirkel is de gevraagde ingeschreven cirkel.



59

Construeer een cirkel omgeschreven aan het gegeven gelijkbenig trapezium.



We construeren de cirkel omgeschreven aan driehoek ABC.

- Construeer de middelloodlijnen op de lijnstukken [AB], [BC] en [AC].
- Deze drie middelloodlijnen snijden elkaar in één punt M.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MA|$, deze cirkel is de gevraagde omgeschreven cirkel.



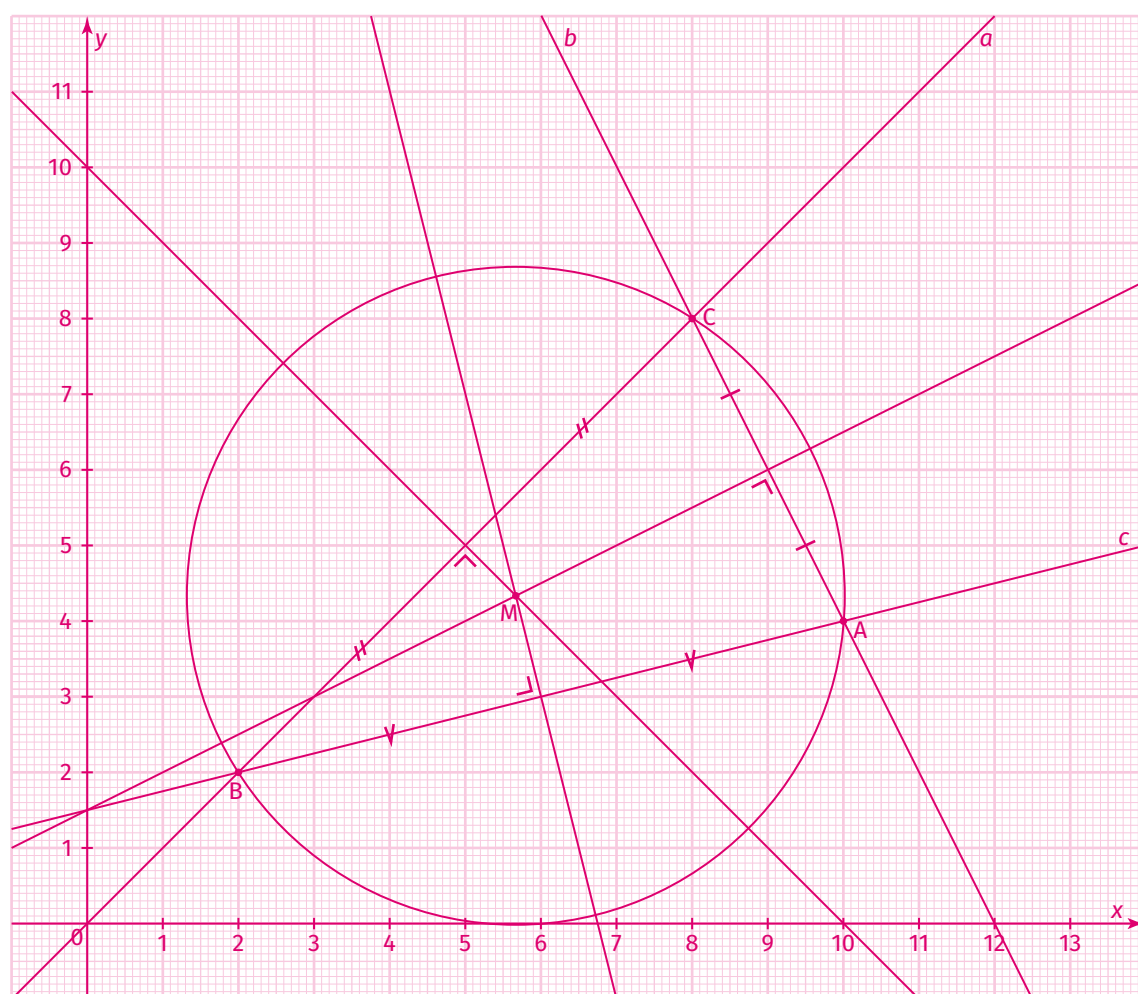


Gegeven: $a \leftrightarrow y = x$

$$b \leftrightarrow y = 24 - 2x$$

$$c \leftrightarrow x - 4y + 6 = 0$$

Gevraagd: Teken deze rechten en construeer een cirkel door de snijpunten van deze rechten. Maak gebruik van ICT.



- Teken deze drie rechten en noem de snijpunten A, B en C.
- Construeer de middelloodlijnen op de drie lijnstukken [AB], [BC] en [AC].
- Deze drie middelloodlijnen snijden elkaar in één punt M.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MA|$, deze cirkel is de gevraagde omgeschreven cirkel.



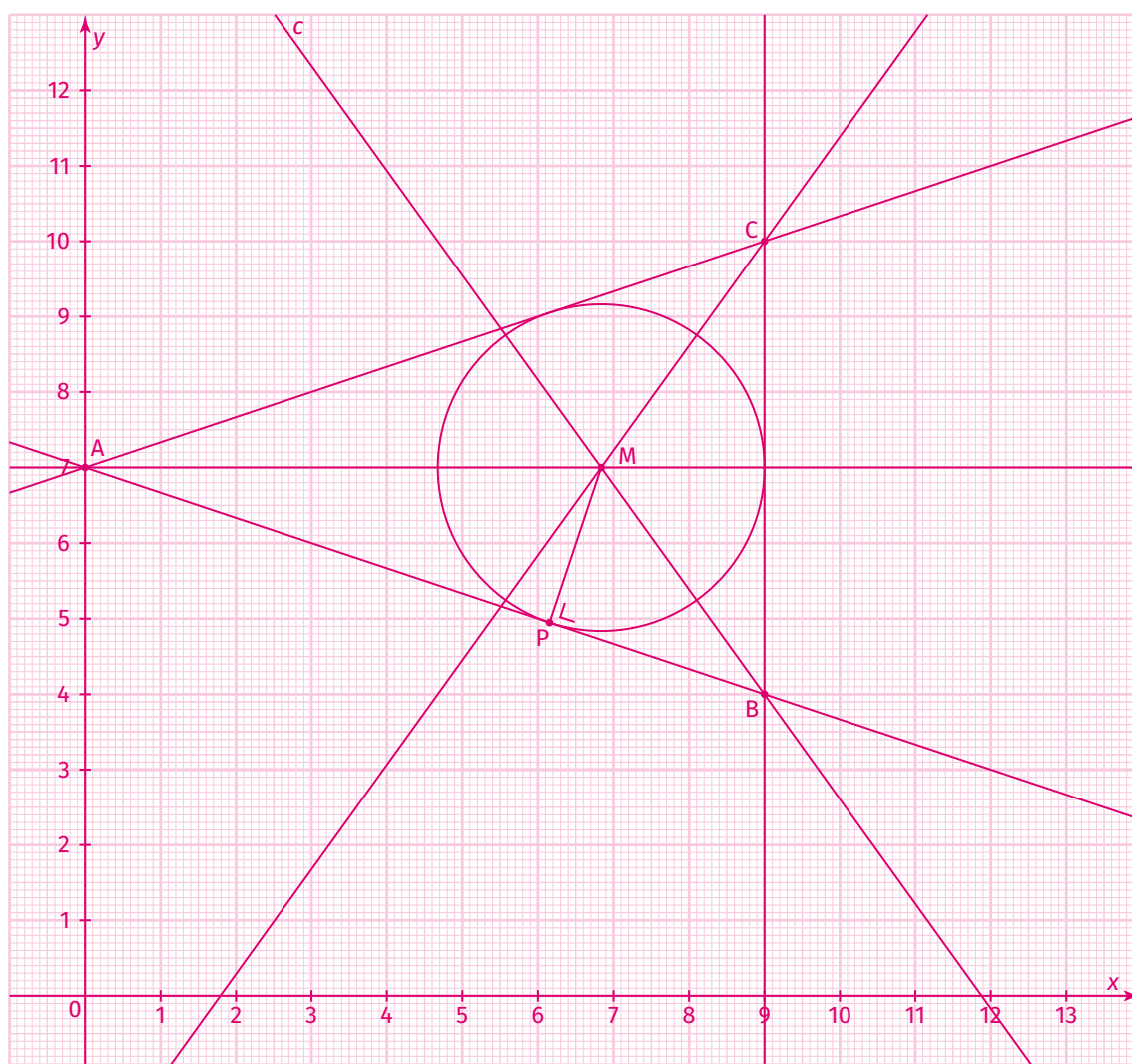


Gegeven: $a \leftrightarrow x = 9$

$$b \leftrightarrow x - 3y + 21 = 0$$

$$c \leftrightarrow x + 3y - 21 = 0$$

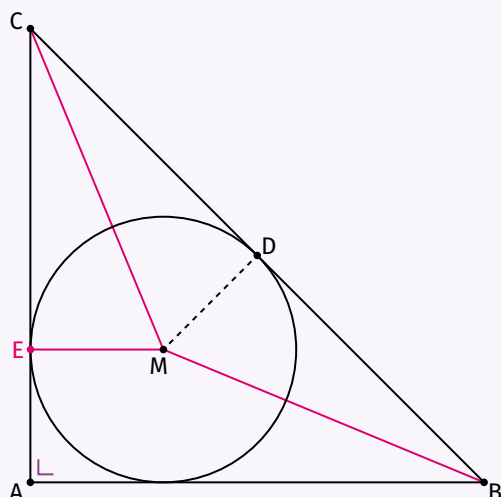
Gevraagd: Teken deze rechten en construeer een cirkel die deze rechten raakt. Maak gebruik van ICT.



- Teken deze drie rechten en noem de snijpunten A, B en C.
- Teken de bissectrice in elke hoek van de driehoek ABC.
- M is het snijpunt van de bissectrices.
- Teken uit M de loodlijn op de zijde [BC].
- S is het snijpunt van deze loodlijn met de zijde.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MS|$, deze cirkel is de gevraagde ingeschreven cirkel.



Een cirkel is ingeschreven in een gelijkbenige rechthoekige driehoek met rechthoekszijde 6 cm. Bepaal de lengte van de straal van de ingeschreven cirkel.



TIP Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de middellijn door het raakpunt.

- Omdat driehoek $\triangle ABC$ rechthoekig en gelijkbenig is, zijn de hoeken B en C gelijk aan 45° en $|BC| = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

- In $\triangle CEM$ en $\triangle CDM$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{E} = \widehat{D} = 90^\circ \quad (\text{eigenschap raaklijn}) \\ |ME| = |MD| = r \\ |CM| = |CM| \quad (\text{gemeenschappelijke zijde}) \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ZZ}90^\circ} \triangle CEM \cong \triangle CDM$$

$$\Downarrow$$

$$\widehat{ECM} = \widehat{DCM}$$

bijgevolg is $\widehat{DCM} = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22^\circ 30'$ (M ligt trouwens op de bissectrice)

Analoog vind je dat $\widehat{DBM} = 22^\circ 30'$. (1)

- In $\triangle CDM$ en $\triangle BDM$ geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{D} = \widehat{D} = 90^\circ \quad (\text{eigenschap raaklijn}) \\ |DM| = |DM| = r \quad (\text{gemeenschappelijke zijde}) \\ \widehat{MCD} = \widehat{DBM} \quad (\text{zie (1)}) \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ZHH}} \triangle CDM \cong \triangle BDM$$

$$\Downarrow$$

$$|CD| = |BD|$$

bijgevolg is $|CD| = \frac{1}{2} |BC| = 3\sqrt{2}$

- In $\triangle CDM$:

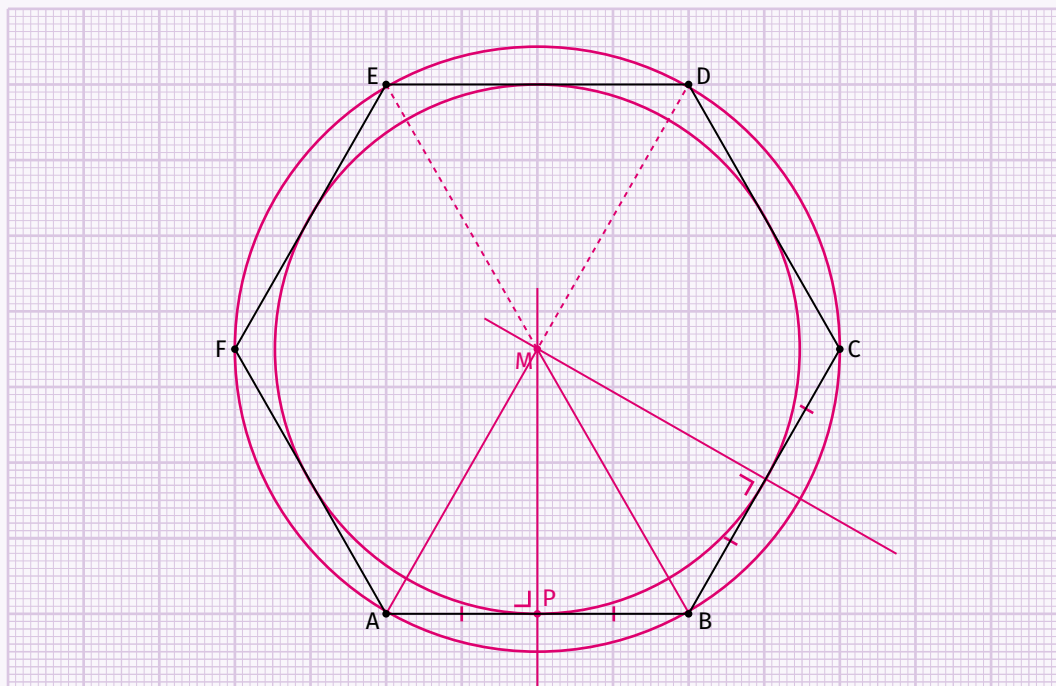
$$\tan(\widehat{DCM}) = \frac{|DM|}{|CD|}$$

$$|DM| = |CD| \cdot \tan(\widehat{DCM})$$

$$r = 3\sqrt{2} \cdot \tan(22^\circ 30') \approx 1,757...$$



Construeer de omgeschreven en ingeschreven cirkel aan een regelmatige zeshoek met zijde 4 cm. Bereken de lengte van de straal van beide cirkels.



Constructie omgeschreven cirkel:

- Construeer de omgeschreven cirkel aan de punten ABC (= omgeschreven cirkel regelmatige zeshoek).
- Construeer de middelloodlijnen op de lijnstukken [AB] en [BC].
- Deze middelloodlijnen snijden elkaar in M.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MA|$, deze cirkel is de gevraagde omgeschreven cirkel.

Berekening van de straal:

$\triangle MED$ is gelijkbenig omdat $|ME| = |MD| = r$.

$$\widehat{EMD} = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$$

M.a.w. in $\triangle MED$ geldt:

$\widehat{E} = \widehat{D} = \widehat{M} = 60^\circ$, dus $\triangle MED$ is gelijkzijdig.

$$r = |ME| = |ED| = 4 \text{ cm.}$$

Constructie ingeschreven cirkel:

- Bepaal het midden P van [AB].
- Construeer de middelloodlijn van [AB] en [BC].
- Het snijpunt van deze middelloodlijn is M. (Dit punt valt samen met het middelpunt van de omgeschreven cirkel.)
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MP|$.

Berekening van de straal:

In $\triangle MPA$ geldt:

$$\hat{P} = 90^\circ$$

$$|AP| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$\hat{M} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

waaruit volgt:

$$\tan \hat{M} = \frac{|AP|}{|MP|}$$

$$|MP| = \frac{|AP|}{\tan \hat{M}}$$

$$|MP| = \frac{2}{\tan 30^\circ}$$

$$|MP| = 2\sqrt{3}$$

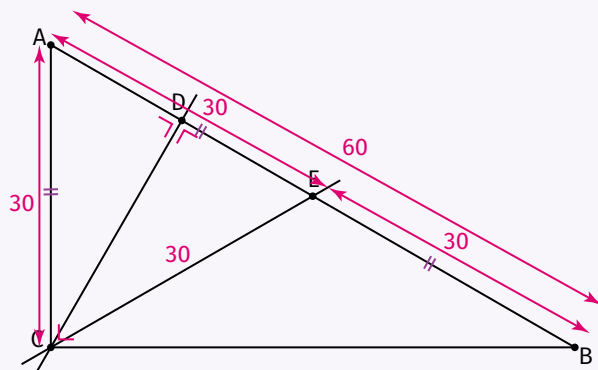
$$|MP| \approx 3,464$$



64

Gegeven: $\triangle ABC$ met $\hat{C} = 90^\circ$, hoogtelijn CD en zwaartelijn CE
 $|AB|$ cm = 60, $|AC|$ = 30 cm en $|CE|$ = 30 cm

Gevraagd: Bereken de omtrek van driehoek ABC .
 Rond je resultaat af tot op 1 cm nauwkeurig.



$$|AE| = 30 \quad (\text{E is het midden van } [AB])$$

$$|AC|^2 = |AD| \cdot |AB| \Leftrightarrow |AD| = \frac{|AC|^2}{|AB|} \Leftrightarrow |AD| = 15$$

$$|BD| = |AB| - |AD| = 45 \quad (\text{tekening})$$

$$|BC|^2 = |BD| \cdot |AB| \Leftrightarrow |BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|} = \sqrt{2700} = 30\sqrt{3}$$

$$p_{\triangle ABC} = 60 + 30 + 30\sqrt{3} = 90 + 30\sqrt{3} \approx 141,96$$

Antwoord: De omtrek van driehoek ABC is ongeveer 142 cm.



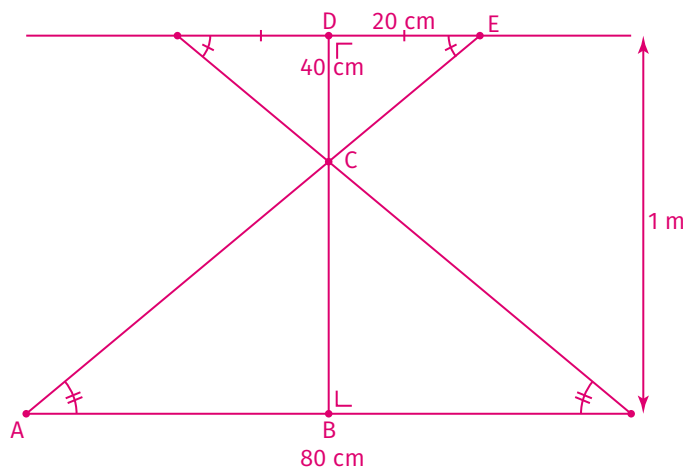
65

Een strijkplank staat opengeklapt op een werkhoogte van 1 m.

De poten staan op de grond 80 cm uit elkaar. De steunpunten aan de onderkant van de strijkplank staan dan 40 cm uit elkaar.

Hoe hoog bevindt het scharnierpunt van de poten zich boven de grond?

Maak een passende tekening en vermeld duidelijk je werkwijze.



In $\triangle ABC$ en $\triangle EDC$ geldt:

$\hat{A} = \hat{E}$ (verwisselende binnenhoeken bij 2 // en hun snijlijn)

$$\hat{B} = \hat{D} \quad (= 90^\circ)$$

HH

$$\triangle ABC \sim \triangle EDC$$

11

$$\frac{|ED|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BC|} \left(= \frac{|EC|}{|AC|} \right)$$

$$\frac{|ED|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|BD| - |BC|}{|BC|}$$

$$\frac{20}{40} = \frac{100 - |BC|}{|BC|} \quad \left(\begin{array}{l} \Downarrow \text{(In een gelijkbenige driehoek is de hoogtelijn op de basis ook de zwaartelijn)} \end{array} \right)$$

$$20 |BC| = (100 - |BC|) \cdot 40$$

$$20 |BC| = 4000 - 40 |BC|$$

$$20 |BC| + 40 |BC| = 4000$$

$$60 |BC| = 4000$$

$$|BC| = \frac{4000}{60}$$

$$|BC| = \frac{200}{3}$$

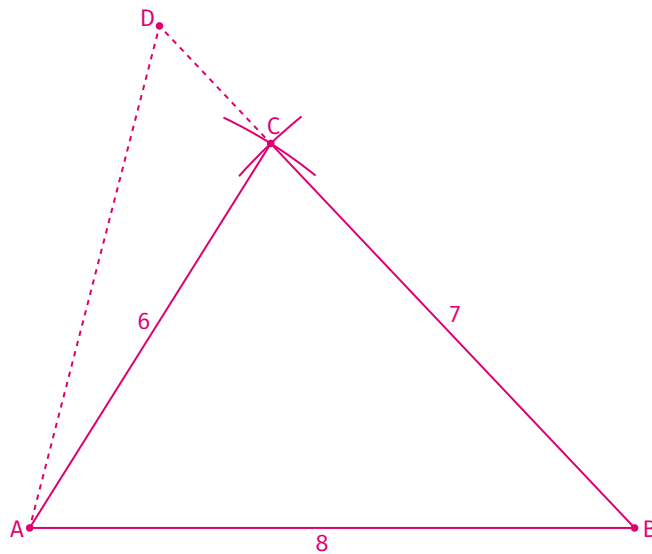
$$|BC| \approx 66,7$$

Antwoord: De hoogte van het scharnierpunt is ongeveer 66,7 cm.



66

In een driehoek ABC met $|AC| = 6$, $|BC| = 7$ en $|AB| = 8$ wordt de zijde $[BC]$ verlengd tot een punt D. De zo bekomen driehoek ABD is gelijkvormig met de oorspronkelijke driehoek ABC. Hoe lang is $[CD]$? Maak een passende tekening.



$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \quad (\text{gegeven})$$



$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$



$$|BD| = |BC| + |CD|$$

$$\frac{|BC| + |CD|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

$$\frac{7 + |CD|}{8} = \frac{8}{7}$$

$$7 \cdot (7 + |CD|) = 8 \cdot 8$$

$$49 + 7 \cdot |CD| = 64$$

$$7 |CD| = 15$$

$$|CD| = \frac{15}{7}$$

$$|CD| \approx 2,14$$

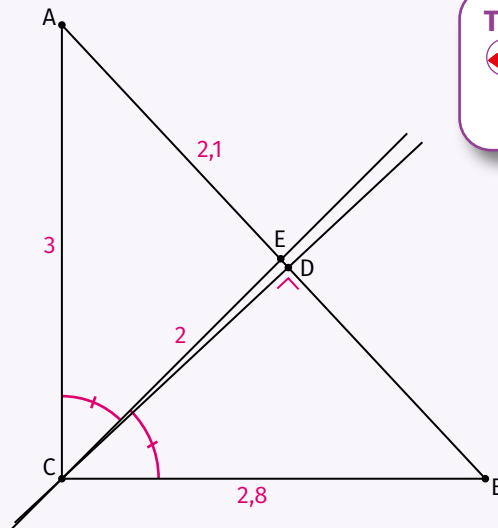


67

Gegeven: rechthoekige driehoek ABC met hoogtelijn CD uit C op AB en deellijn CE van $\hat{C}$.

$|AE| = 2,1$; $|CE| = 2$ en $|AC| = 3$

Gevraagd: Bereken $|ED|$ tot op 0,001 nauwkeurig.



TIP Vul eerst de tekening aan met alle gegevens: afmetingen, merktekens, ...

- $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$
 $9 = |AB| \cdot (2,1 + |ED|) (*)$

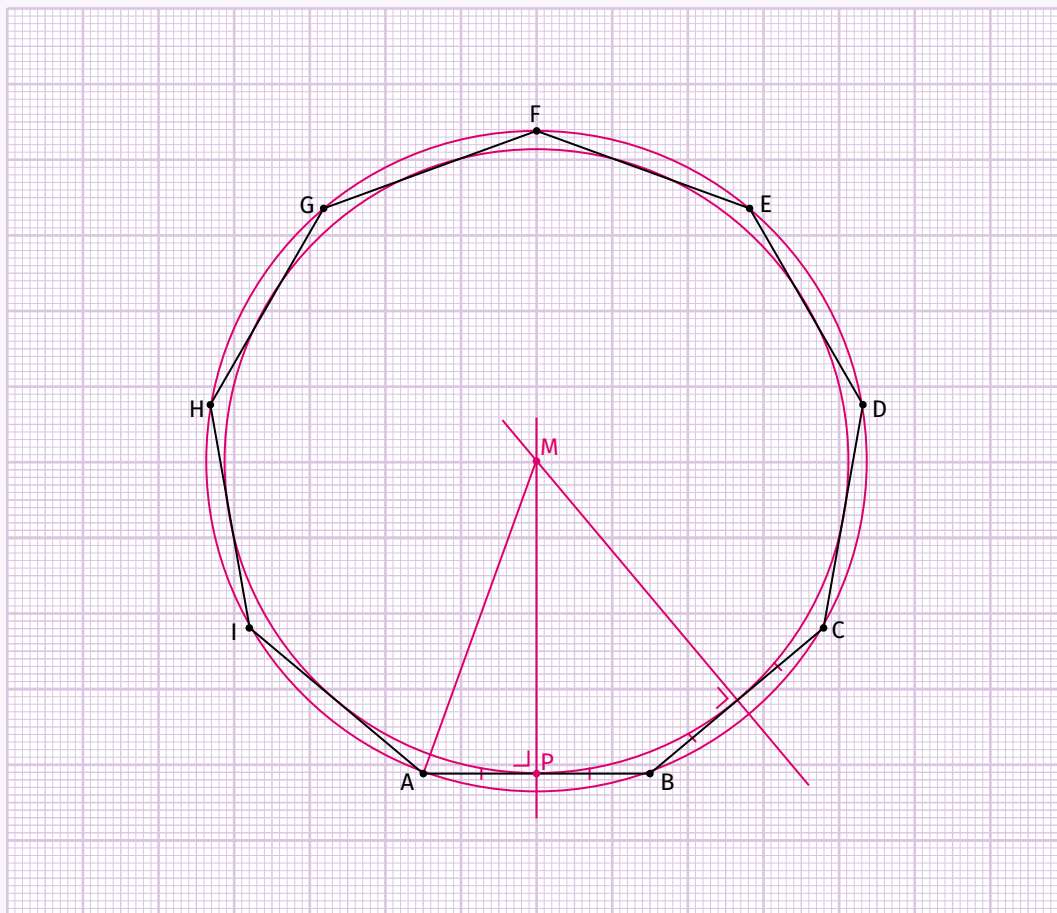
- $\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$
 $\frac{2,1}{|EB|} = \frac{3}{2,8}$
 $|EB| = 1,96$

- $|AB| = 2,1 + |EB|$
 $|AB| = 4,06$

- (*)
 $9 = |AB| \cdot (2,1 + |ED|)$
 $9 = 4,06 \cdot (2,1 + |ED|)$
 $2,2167 = 2,1 + |ED|$
 $|ED| \approx 0,117$



Construeer de omgeschreven en ingeschreven cirkel aan een regelmatige negenhoek met zijde 3 cm. Bereken de lengte van de straal van beide cirkels.



Constructie omgeschreven cirkel:

- Construeer de omgeschreven cirkel aan de punten ABC (= omgeschreven cirkel regelmatige zeshoek).
- Construeer de middelloodlijnen op de lijnstukken [AB] en [BC].
- Deze middelloodlijnen snijden elkaar in M.
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MA|$, deze cirkel is de gevraagde omgeschreven cirkel.

Berekenen van de straal:

In $\triangle MPA$ geldt:

$$\hat{P} = 90^\circ$$

$$|AP| = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1,5$$

$$\hat{M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot 360^\circ = 20^\circ$$

waaruit volgt:

$$\sin \hat{M} = \frac{|AP|}{|MA|}$$

$$|MA| = \frac{|AP|}{\sin \hat{M}}$$

$$|MA| = \frac{1,5}{\sin 20^\circ}$$

$$|MA| \approx 4,3857...$$

Constructie ingeschreven cirkel:

- Bepaal het midden P van [AB].
- Construeer de middelloodlijn van [AC] en [BC].
- Het snijpunt van deze middelloodlijn is M. (Dit punt valt samen met het middelpunt van de omgeschreven cirkel.)
- Teken de cirkel met middelpunt M en straal $r = |MP|$.

Berekenen van de straal:

In $\triangle MPA$ geldt:

$$\widehat{P} = 90^\circ$$

$$|AP| = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1,5$$

$$\widehat{M} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot 360^\circ = 20^\circ$$

waaruit volgt

$$\tan \widehat{M} = \frac{|AP|}{|MP|}$$

$$|MP| = \frac{|AP|}{\tan \widehat{M}}$$

$$|MP| = \frac{1,5}{\tan 20^\circ}$$

$$|MP| \approx 4,1212...$$



Het zwaartepunt van een driehoek verdeelt elke zwaartelijijn in twee stukken die zich verhouden als 2:1.
Bewijs deze eigenschap.



TIP Maak gebruik van de eigenschap van een middenparallel in de driehoek.

Gegeven: $\triangle ABC$
 $N = \text{mi}[BC]$
 $M = \text{mi}[AB]$
 Z is het snijpunt van CM en AN .

Te bewijzen: $\frac{|AZ|}{|ZN|} = \frac{|CZ|}{|ZM|} = \frac{2}{1}$

Bewijs: • M is het midden van $[AB]$
 en N is het midden van $[BC]$
 $\Downarrow$
 $[MN]$ is een middenparallel van $\triangle ABC$

$\Downarrow$
 $MN \parallel AC$ en $\frac{|AC|}{|MN|} = \frac{2}{1}$ (*)

• In $\triangle ACZ$ en $\triangle NMZ$ geldt:

$\hat{A} = \hat{N}$ (verwisselende binnenhoeken bij 2 evenwijdigen en hun snijlijn)

$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$ (overstaande hoeken)

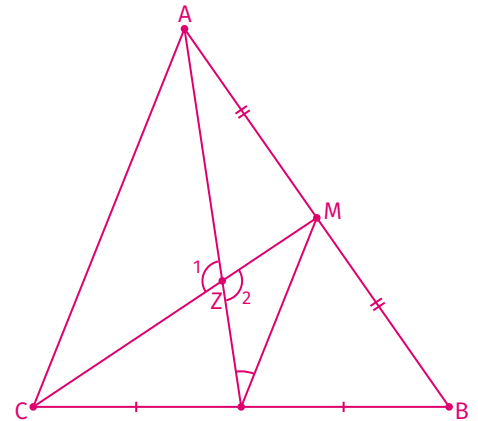
$\Downarrow$ HH
 $\triangle ACZ \sim \triangle NMZ$

$\Downarrow$ (def. gelijkvormige driehoeken)

$$\frac{|AC|}{|NM|} = \frac{|CZ|}{|MZ|} = \frac{|AZ|}{|NZ|}$$

$\Downarrow$ $\frac{|AC|}{|MN|} = \frac{2}{1}$ (zie *)

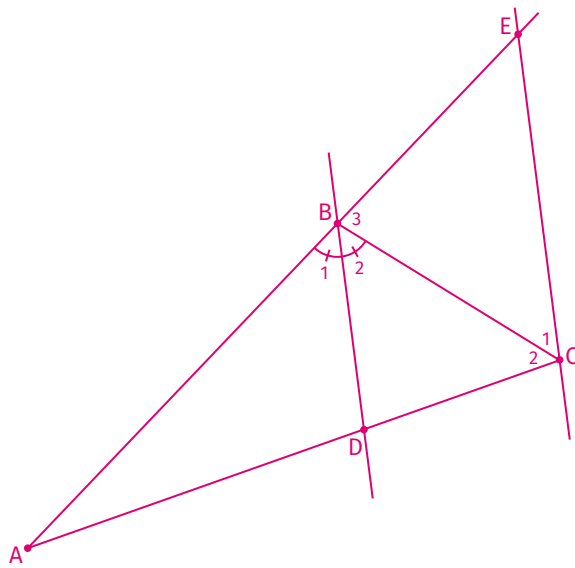
$$\frac{|AZ|}{|ZN|} = \frac{|CZ|}{|ZM|} = \frac{2}{1}$$



In een driehoek verdeelt de bissectrice van een hoek de overstaande zijde in stukken die evenredig zijn met de aanliggende zijden.
Bewijs deze eigenschap.



TIP Teken door een hoekpunt van de driehoek een rechte evenwijdig met de bissectrice.



$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BE|}{|DE|}$$

$\Downarrow$ Thales met $BD \parallel EC$ en snijlijn AE en AC

$$\frac{|DC|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|AB|}$$

$$\frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AB|}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B}_1 = \widehat{E} \quad (\text{overeenkomstige hoeken}) \\ \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 \quad (\text{verwisselende binnenhoeken}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BCE \text{ is gelijkbenig}$$

$$\Downarrow \\ |BE| = |BC|$$



71

Geef het juiste begrip.

- a) $AB \leftrightarrow y = -2x + 6$ is ...
- b) $AB \leftrightarrow (x, y) = (4 + k, -2 + k)$ is ...
- c) $AB \leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$ is ...
- d) $AB \leftrightarrow \vec{P} = \vec{A} + k \cdot \vec{AB}$ is ...

- a) $AB \leftrightarrow y = -2x + 6$ is **een cartesische vergelijking van een rechte**
- b) $AB \leftrightarrow (x, y) = (4 + k, -2 + k)$ is **een parametrische vergelijking van een rechte**
- c) $AB \leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$ is **een algemene vergelijking van een rechte**
- d) $AB \leftrightarrow \vec{P} = \vec{A} + k \cdot \vec{AB}$ is **een vectoriële vergelijking van een rechte**

72

Bepaal een parametrische vergelijking van AB als $A(-2, 1)$ en $B(4, 3)$.

$$AB \leftrightarrow \vec{P} = \vec{A} + k \cdot \vec{AB}$$

De coördinaat van de vector $\vec{AB}$ is $(4 - (-2), 3 - 1) = (6, 2)$

$$(x, y) = (-2, 1) + k \cdot (6, 2)$$

$$(x, y) = (-2, 1) + (6k, 2k)$$

$$(x, y) = (6k - 2, 2k + 1)$$

73

Ligt $P(1, 4)$ op de rechte $a \leftrightarrow (x, y) = (4k - 1, 8k)$?

We stellen de vergelijking van de rechte a op:

$$\begin{array}{ll} x = 4k - 1 & y = 8k \\ k = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & k = \frac{1}{8}y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Downarrow \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}y \\ 2x + 2 = y \\ 2x - y + 2 = 0 \end{array}$$

$2 \cdot 1 - 4 + 2 = 0$ dus het punt P ligt op de rechte A .

74

Gegeven A(3, -2) en B(-1, 4)

- a) Geef de vectoriële vergelijking van AB.
 b) Geef een parametrische vergelijking van AB.
 c) Geef de cartesische vergelijking van AB.

a) Vectoriële vergelijking: $\vec{P} = \vec{A} + k \cdot \vec{AB}$

b) Coördinaat van de vector $\vec{AB} = (-1 - 3, 4 - (-2)) = (-4, 6)$

Parametrische vergelijking: $(x, y) = (3, -2) + k \cdot (-4, 6)$

$$(x, y) = (3, -2) + (-4k, 6k)$$

$$(x, y) = (3 - 4k; 6k - 2)$$

c) $x = 3 - 4k$ $y = 6k - 2$
 $k = \frac{-1}{4}x + \frac{3}{4}$ $k = \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}$

$$\frac{-1}{4}x + \frac{3}{4} = \frac{1}{6}y + \frac{1}{3}$$

$$12 \cdot \left(\frac{-1}{4}x + \frac{3}{4} \right) = \left(\frac{1}{6}y + \frac{1}{3} \right) \cdot 12$$

$$-3x + 9 = 2y + 4$$

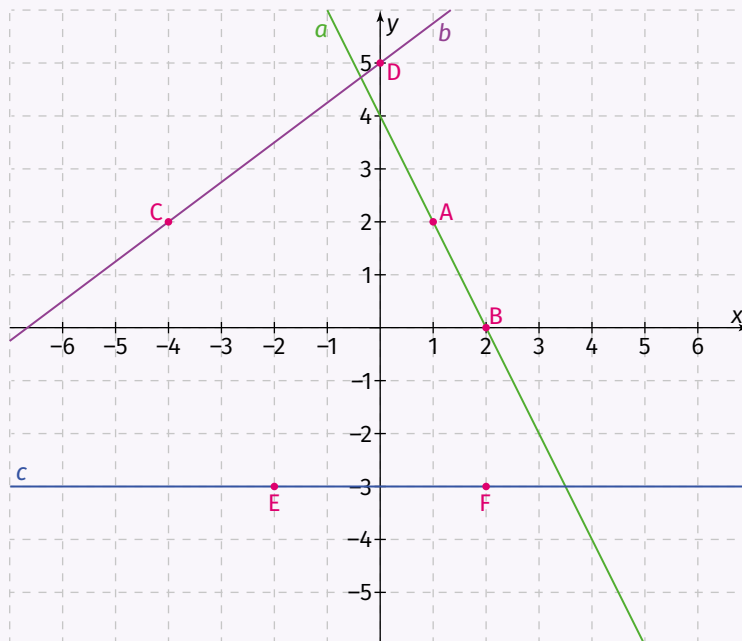
$$3x + 2y - 5 = 0$$

$$AB \leftrightarrow 3x + 2y - 5 = 0$$



75

Bepaal een richtvector en stel de vectoriële en parametrische vergelijking op van de volgende rechten a, b en c.



$$a \leftrightarrow \vec{P} = \vec{A} + k \cdot \vec{AB} \text{ met } \vec{AB}(1, -2)$$

$$a \leftrightarrow (x, y) = (1, 2) + k \cdot (1, -2) = (1 + k, 2 - 2k)$$

$$b \leftrightarrow \vec{P} = \vec{C} + l \cdot \vec{CD} \text{ met } \vec{CD}(4, 3)$$

$$b \leftrightarrow (x, y) = (-4, 2) + l \cdot (4, 3) = (-4 + 4l, 2 + 3l)$$

$$c \leftrightarrow \vec{P} = \vec{E} + m \cdot \vec{EF} \text{ met } \vec{EF}(4, 0)$$

$$c \leftrightarrow (x, y) = (-2, -3) + m \cdot (4, 0) = (-2 + 4m, -3)$$



76

Stel de vectoriële en parametrische vergelijking op van de rechte door de punten A(4, 2) en B(6, 9).

$$\vec{P} = \vec{A} + k \cdot \vec{AB} \quad \text{met} \quad \vec{AB}(2, 7)$$

$$(x, y) = (4, 2) + k(2, 7)$$

$$(x, y) = (4, 2) + (2k, 7k)$$

$$(x, y) = (4 + 2k, 2 + 7k)$$



77

Een boot vertrekt vanuit het punt $(-6, 2)$ en vaart met een snelheid van 3 m/s naar het oosten. De lengte-eenheid op x- en y-as is meter.

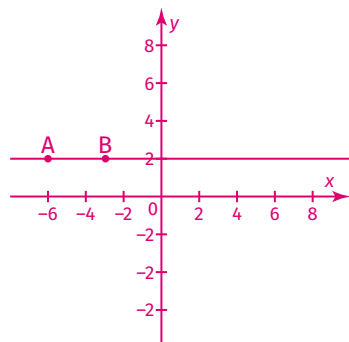
a) Bepaal de positie van de boot voor verschillende tijdstippen t .

t	0	1	2	3	4	5
x	-6	-3	0	3	6	9
y	2	2	2	2	2	2

b) Teken de baan van de boot in een assenstelsel.

c) Geef de vectoriële en parametrische vergelijking van deze rechtlijnige baan. Gebruik t als parameter.

b)



$$\text{c) } \vec{P} = \vec{A} + t \cdot \vec{AB} \quad \text{met} \quad \vec{AB}(3, 0)$$

$$(x, y) = (-6, 2) + t \cdot (3, 0)$$

$$(x, y) = (-6, 2) + (3t, 0)$$

$$(x, y) = (-6 + 3t, 2)$$



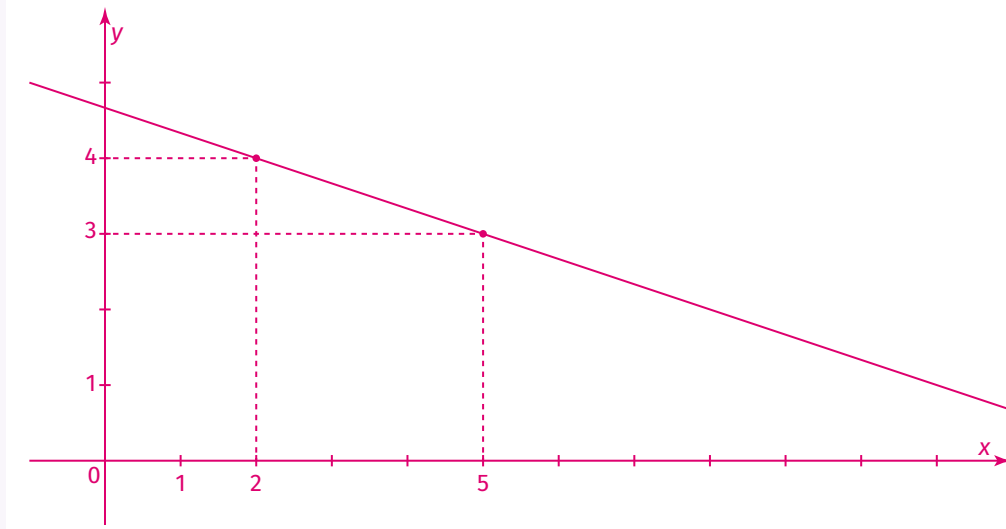
78

Teken de rechte met vergelijking $(x, y) = (2, 4) + k(-3, 1)$ in een assenstelsel.

- $(x, y) = (2 - 3k, 4 + k)$

Als $k = 0$, dan $(x, y) = (2, 4)$.

Als $k = -1$, dan $(x, y) = (2 - 3 \cdot (-1), 4 + (-1)) = (5, 3)$.



79

Welk punt op de rechte l met onderstaande vergelijking heeft als parameterwaarde $\frac{7}{4}$?

$$(x, y) = \left(4, -\frac{3}{2}\right) + s \cdot (-3, 1) \quad \text{met } s \in \mathbb{R}$$

- $(x, y) = \left(4 - 3s, -\frac{3}{2} + s\right)$

- Als $s = \frac{7}{4}$, dan $y = -\frac{3}{2} + \frac{7}{4} = -\frac{6}{4} + \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$.

- Als $s = \frac{7}{4}$, dan $x = 4 - 3 \cdot \frac{7}{4} = \frac{16}{4} - \frac{21}{4} = -\frac{5}{4}$.

- $P\left(-\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$



80

Geef een mogelijke richtvector van een rechte evenwijdig met de y -as.

$\vec{A}$ met $\vec{A}(1, 0)$



81

Welk deel van de rechte AB heeft een negatief getal als parameterwaarde t.o.v. de richtvector $\vec{AB}$?

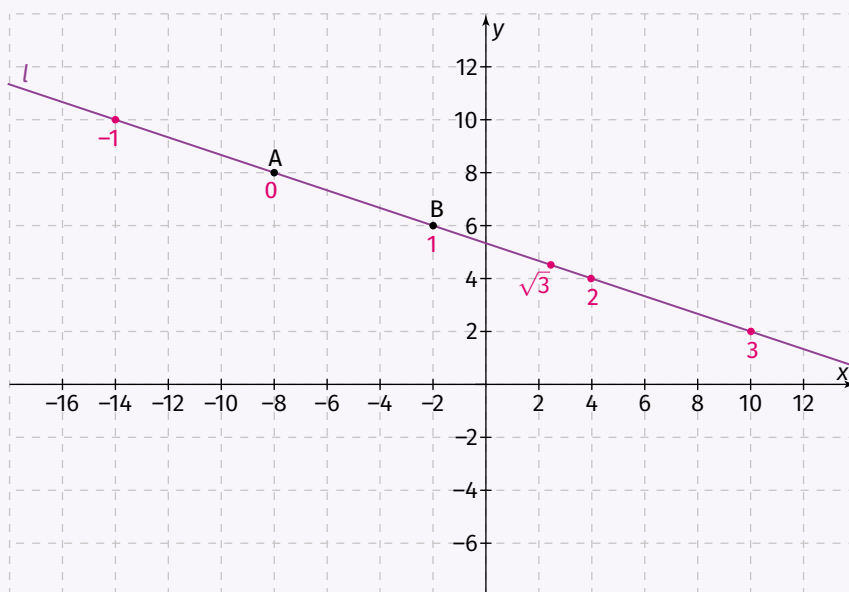
Alle punten links van het punt A als $\vec{AB}$ naar rechts wijst.

Alle punten rechts van het punt A als $\vec{AB}$ naar links wijst.



82

Beschouw de grafiek van de rechte l . Neem als richtvector $\overrightarrow{AB}$.



- Stel de vectoriële en parametrische vergelijking van de rechte l op.
- Wat is de waarde van de parameter voor de punten A en B?
- Duid de punten op de rechte aan met gehele waarden van de parameter. Schrijf de waarde er telkens bij.
- Duid het punt op l aan met parameterwaarde $\sqrt{3}$.
- Wat is de waarde van de parameter voor het midden van het lijnstuk $[AB]$?

a) $\vec{P} = \vec{A} + k \cdot \overrightarrow{AB}$

$$(x, y) = (-8, 8) + k \cdot (6, -2)$$

$$(x, y) = (-8, 8) + (6k, -2k)$$

$$(x, y) = (-8 + 6k, 8 - 2k)$$

b) $A(-8, 8) = (-8 + 6k, 8 - 2k) \quad B(-2, 6) = (-8 + 6k, 8 - 2k)$

$$\cancel{8} = \cancel{8} + 6k$$

$$0 = k$$

$$-2 = -8 + 6k$$

$$6 = 6k$$

$$1 = k$$

c) zie grafiek

d) $(-8 + 6\sqrt{3}, 8 - 2\sqrt{3})$

e) $k = 0,5$



83

Bepaal de waarde van de parameter k van het punt $P(16, -9)$ op de rechte l met vergelijking

$$(x, y) = (-8, 3) + k \cdot (4, -2) \quad \text{met } k \in \mathbb{R}.$$

• $(16, -9) = (-8 + 4k, 3 - 2k)$

• $16 = -8 + 4k$

$$\frac{24}{4} = k$$

$$6 = k$$



Een boot vertrekt vanuit het punt $(-8, 10)$ en vaart met een snelheid van 5 m/s in zuidoostelijke richting. Telkens als de boot 3 meter naar het zuiden vaart, is hij 4 meter naar het oosten gevaren. De lengte-eenheid op x- en y-as is meter.

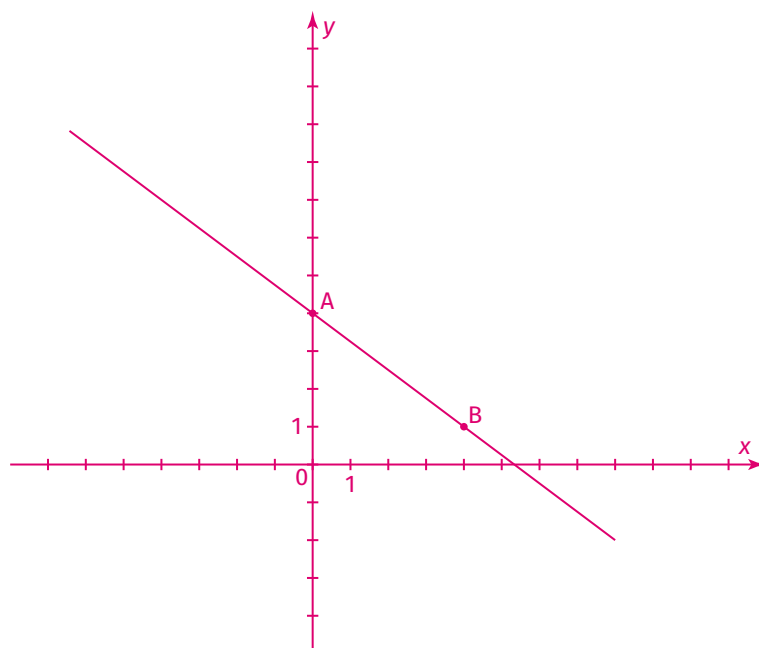
a) Bepaal de positie van de boot voor verschillende tijdstippen t .

t	0	1	2	3	4	5
x	-8	-4	0	4	8	12
y	10	7	4	1	-2	-5

b) Teken de baan van de boot in een assenstelsel.

c) Geef de vectoriële en parametrische vergelijking van deze rechtebaan. Gebruik t als parameter.

b)



c) $(x, y) = (-8, 10) + t(4, -3)$
 $(x, y) = (-8, 10) + (4t, -3t)$
 $(x, y) = (-8 + 4t, 10 - 3t)$



85

Bepaal de waarde van de parameter r van het punt $P(-3, 4)$ op de rechte l met vergelijking

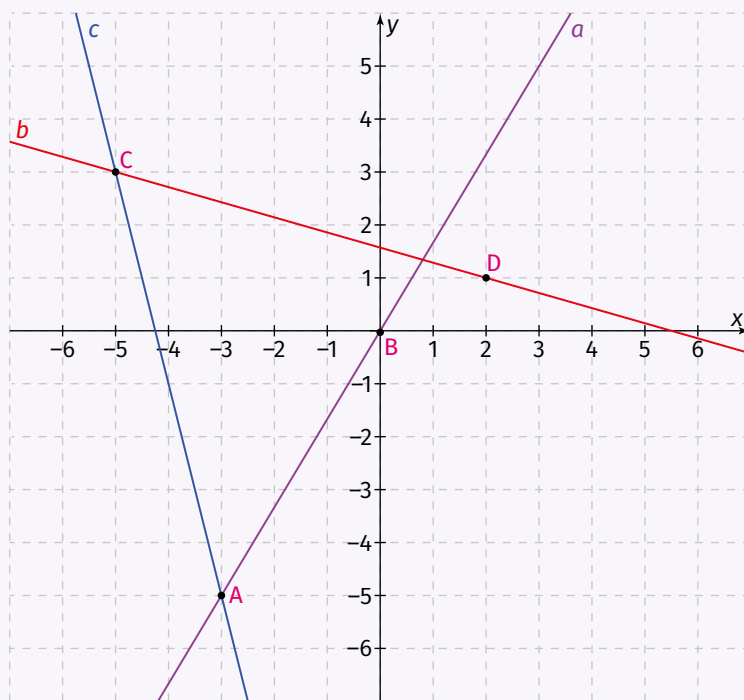
$$(x, y) = \left(\frac{21}{5}, -8\right) + r \cdot (3, -5) \quad \text{met } r \in \mathbb{R}.$$

- $(-3, 4) = \left(\frac{21}{5} + 3r, -8 - 5r\right)$
- $4 = -8 - 5r$
- $\frac{12}{-5} = r$
- $r = -2,4$



86

Bepaal de coördinaatgetallen van een richtvector van de getekende rechten.



- $a : \overrightarrow{AB}(3, 5)$
- $c : \overrightarrow{CA}(2, -8)$
- $b : \overrightarrow{CD}(7, -2)$

